ИСТОРИЯ АРИФМЕТИКИ

И·Я·ДЕПМАН

ИСТОРИЯ АРИФМЕТИКИ

И. Я. ДЕПМАН

ИСТОРИЯ АРИФМЕТИКИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ“
МОСКВА
1965

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Преподавание математики в школе в новых условиях должно обеспечить прочное и сознательное овладение основами математических знаний и привитие учащимся умений применять эти знания к решению практических вопросов.

Одним из средств решения этой задачи является использование на уроках арифметики исторических сведений, раскрывающих учащимся пути возникновения арифметических понятий из трудовой деятельности человека и определяющих место математики в истории культуры.

Настоящая книга должна помочь учителю улучшить преподавание арифметики.

Все замечания и пожелания по содержанию книги просьба направлять по адресу: Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение».

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга является собранием очерков по истории арифметики. Автор стремился лишь осветить исторически все основные разделы арифметики, составляющие содержание школьного курса. Историю арифметики — науки можно найти в книге Иоганнеса Тропфке (1866—1939) «История элементарной математики» (т. I — «Арифметика», изд. 3, Берлин и Лейпциг, 1930); в ней 430 страниц текста и 1343 указания на источники, занимающие значительную часть книги. Точные хронологические и библиографические сведения о возникновении и эволюции всех идей арифметики как науки даёт капитальный труд Леонарда Диксона (1874—1954) «История теории чисел» (три тома мельчайшего шрифта, 1700 страниц, Нью-Йорк, 1934) — результат многолетней работы автора с целым штатом своих помощников.

При составлении настоящей книги, предлагаемой советскому учителю, автор не мог подражать этим капитальным трудам ни по количеству охватываемых вопросов, ни по стилю изложения. Доступность изложения материала и специфические интересы основной группы предполагаемых читателей книги — учителей математики стояли в центре внимания автора.

Много лет преподавал автор историю математики будущим учителям (в ленинградских педагогических институтах) и учителям-практикам (в институте усовершенствования учителей), но вызвать настоящий интерес к предмету ему удалось лишь после того, как лекции стали насыщаться примерами, которые учитель мог бы использовать непосредственно в своей повседневной работе. Учитывая этот опыт, автор даёт в предлагаемой книге много арифметических сведений (формул, правил и их выводов) для практического использования учителем в классе или во внеклассной работе, чем его изложение прежде всего отличается от названных выше трудов, характеристика которых будет приведена в книге.

Итак, автор сознательно ограничивается изложением тех исторических сведений, которые могут быть использованы учителем для того, чтобы сделать уроки арифметики более интересными и содержательными. Стремление автора совпадает с мыслью современного поэта:

Нет, я не забываю день вчерашний,
Живу, однако, не вчерашним днем.

Знание вчерашнего должно служить для улучшения работы сегодняшнего дня.

Усвоение арифметики учащимися в школе многократно признавалось далёким от желаемого. Из всех предметов школьного курса математики арифметика, по общему признанию учителей и экзаменаторов при приёме в высшие учебные заведения, часто усвоена учащимися слабее остальных предметов этого курса. Недостаточное усвоение арифметики сказывается в упражнениях из других разделов математики, в разных расчётах, сопровождающих изучение других предметов, а неумение быстро и рационально выполнять арифметические расчёты и решать практические задачи даёт себя знать при работе окончивших школу на производстве.

Хорошая постановка преподавания арифметики в школе имеет исключительно важное значение.

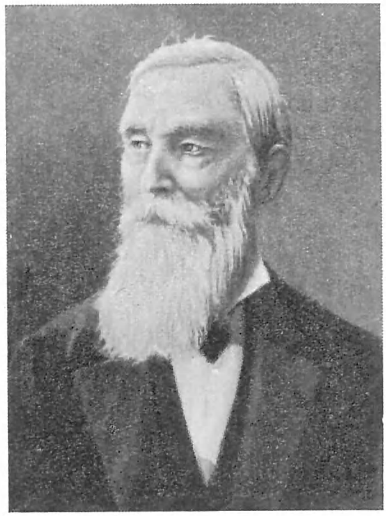
Учащийся занимается арифметикой в течение первых шести лет своей школьной жизни. Арифметика есть первый математический предмет, изучаемый школьником. На уроках арифметики у ребёнка вырабатывается определённое отношение к математике не только на ближайшие годы учения, но иногда и на всю последующую жизнь.

Интерес человека к математике закладывается прежде всего на уроках арифметики, так как впечатления от первых уроков математики в школе являются, как все первичные впечатления в любой сфере восприятий, самыми устойчивыми в памяти и сознании человека[1]. Поэтому уроки арифметики в школе в V—VI классах должны поручаться самым опытным учителям, любящим арифметику и глубоко понимающим её воспитательное значение; такое же место должна занимать арифметика в работе учителей I—IV классов. Ошибочным является поведение тех руководителей школ, которые обучение арифметике в V—VI классах поручают учителям, имеющим недостаточно часов в старших классах или начинающим. Директор и заведующий учебной частью должны прежде всего определить, кому из учителей можно поручить преподавание арифметики, и только после этого дополнять их нагрузку уроками в старших классах.

К сожалению, в школах часто имеет место недооценка арифметики как предмета. Разве не об этом говорит случай, недавно

[1] К. Д. Ушинский иллюстрирует эту мысль сравнением: «Маленькая птичка, посидевши на молоденькой ветке дерева, определит, может быть, будущее направление толстого и крепкого сука, которое кажется нам делом прихотливого случая».

имевший место. Пишущему эти строки нужно было встретиться с учителем Х. в одной из ленинградских школ. Директор школы заявил, что такого учителя математики у него нет. Когда же Х. зашёл в учительскую, то на недоуменный взгляд ищущего встречи с Х. последовало замечание директора: «Вы так бы и сказали, что вам нужен учитель арифметики, а не учитель математики».



Пафнутий Львович Чебышев.

В этой недооценке арифметики повинны и сами учителя математики, которые часто свысока смотрят на арифметику, как на дисциплину, не заслуживающую называться математической наукой. Такой взгляд культивировался школой и, в частности, положением арифметики в учебных планах педагогических институтов, в которых до недавнего времени арифметике не отводилось должного места. Между тем на уроках арифметики учитель рассматривает вопросы, которыми занимается математическая наука сегодняшнего дня. Выдающиеся работы П. Л. Чебышева и академика И. М. Виноградова касаются вопросов о простых числах. Хотя эти работы выполнены самыми высокими средствами современной математики, однако смысл их понятен учащимся. Популярное ознакомление с этими работами и их творцами является одним из действенных средств воспитания интереса к математике у учащихся.

Во втором разделе книги говорится о некоторых свойствах натуральных чисел и соотношениях между ними. Открытие этих свойств и соотношений принадлежит известным учёным прошлого и современности. Во многих случаях имеется возможность доступно изложить эти вопросы, и практика показывает повышенный интерес учащихся к ним.

По мнению автора книги, эти сведения кратко могут включаться в урок, а в более широком плане служить материалом для работы кружков. Трудность, часто только кажущаяся, некоторых из этих вопросов не должна пугать ни учителя, ни ученика. Автор писал свою книгу «учитися хотящим» — как говорит заглавие старой русской книги. В каждом классе имеются ученики, увлекающиеся математикой. Для них будут интересными именно самые трудные вопросы из истории арифметики.

В старших классах во многие виды внеклассной работы можно включать разделы истории арифметики. Приводимые в книге факты и примеры, изложенные на исторической канве развития арифметики, могут служить для этой цели.

Одной из причин слабого знания арифметики оканчивающими среднюю школу является то обстоятельство, что, погружаясь в старших классах в изучение алгебры, геометрии и тригонометрии, учащиеся забывают арифметику, чему способствуют сами учителя. Учителю математики не следует забывать мудрую восточную пословицу: «Знания, не пополняемые ежедневно, убывают с каждым днем».

Это и происходит в старших классах школы со знаниями арифметики.

Известный профессор Московского университета и автор учебников математики для средней школы, Август Юльевич Давидов (1823—1885 гг.), среди многочисленных своих обязанностей считал самой ответственной и важной просмотр работ по математике оканчивающих гимназию. Сложив в преклонном возрасте все служебные и общественные обязанности, он до последних дней своей жизни наблюдал за преподаванием математики в средней школе. Его особенно интересовало качество ответов по арифметике.

Просматривая экзаменационные работы на аттестат зрелости в 1874 г., он отмечал, что ответы по арифметике слабее, чем ответы по другим отделам математики (факт, констатируемый и теперь ежегодно), хотя предлагавшиеся арифметические задачи были несложные и решение их основывалось на самых элементарных арифметических соображениях.

В своём отчёте Давидов объяснял это тем, что курс арифметики кончался в то время в III классе гимназии, прочие же отделы математики продолжались до окончания гимназии. «Однако, — указывал Давидов, — для большинства учащихся геометрия, алгебра и тригонометрия имеют только формальную пользу; по окончании гимназии сведения, приобретённые учеником в этих отделах, по недостаточности упражнений и приложений скоро утрачиваются, между тем как в арифметических знаниях каждый из них будет нуждаться в продолжение всей жизни, и потому именно желательно, чтобы ученики вынесли из учебного заведения вполне твёрдое и прочное усвоение арифметических приёмов» [1].

Министерство народного просвещения признало приведённые соображения Давидова весьма важными и передало их на обсуждение учёного комитета министерства, в котором, правда, уже не состоял П. Л. Чебышев, вышедший из состава комитета в 1873 г., но где в отношении к преподаванию математики продолжал господствовать его дух. Комитет пришёл к заключению о необходимости принятия срочных мер, которые улучшили бы преподавание арифметики в гимназиях. Вероятно, это было од-

[1] Московское областное архивное управление, фонд — Московский учебный округ, т. 1, 1874, д. 3, стр. 22.

ной из причин установления повторения арифметики в выпускных классах тогдашних средних школ. О необходимости принятия такой меры неоднократно высказывались учителя и в наши дни.

Иван Матвеевич Виноградов.

Несколько слов о том, как целесообразно использовать эту книгу. Она адресована в первую очередь учителю арифметики и, как сказано выше, стремится дать такой материал, который может быть использован учителем на уроке и в кружке. Книга избегает доказательств, которые требуют знаний, выходящих за границы школьной программы первых семи классов. Поэтому во втором разделе (в основном тексте книги) ряд предложений не имеет таких доказательств, которые требуют сведений из курса алгебры старших классов. Некоторые доказательства или указания приводятся в примечаниях, помещённых в конце книги. Интересные соотношения между числами, которые ученик на примерах может проверить, хотя он и не в состоянии ещё их строго доказать при помощи имеющихся у него теоретических сведений, полезны сами по себе, возбуждая интерес и стремление учащихся искать доказательств в старших классах и, таким образом, возвращаться к арифметике.

Современный французский педагог, Валусинский («Бюллетень ассоциации преподавателей математики Франции», 1956, № 175) резко возражает против задач, начинающихся словами «Доказать, что...». Предварительное, на примерах, в историческом рассказе ознакомление учащихся с подлежащими доказательству равенствами даёт возможность превратить изучение их в те «естественные, не надуманные, упражнения», которых требовал при преподавании математики философ Монтень.

Не следует смущаться, что таких упражнений дано в книге много. Книга должна служить читателям, требования и потребности которых могут быть разного уровня. Естественно вспомнить при этом слова Гёте:

> Кто многое с собой несёт,
> Тот многим что-нибудь приносит.

Каждый читатель из любой книги возьмёт столько, сколько он в состоянии взять. Для книги с «расширенным адресом», рассчитанной на многочисленный круг читателей, с различной под-

Август Юльевич Давидов.

готовкой, упрёк «слишком много фактов!» лучше упрёка «слишком мало фактов!»

Помещение в примечаниях, а отчасти и в тексте книги значительного числа фактических данных, изложение которых представляет иногда отклонение от основного хода рассуждения, имеет существенное значение.

Каждый лектор, а читающий курс истории математики в особенности, часто начинает лекцию словами: «Как известно...» и т. д. Из аудитории, с которой у лектора установились хорошие отношения, весьма часто на это следует отклик: «А нам это не известно». Лектор обычно в этих случаях делает соответствующий экскурс в сторону от основной темы лекции.

Допущенные в книге экскурсы в сторону от основной нити рассказа имеют целью освободить автора от слов «как известно». Вполне вероятно, что для некоторой части читателей приводимые в названных экскурсах сведения покажутся скучными, как уже известные, но для другой части читателей они могут оказаться необходимыми для понимания общей идеи излагаемого.

Желание удовлетворить разнохарактерному кругу читателей книги объясняет отсутствие в ряде вопросов строгих кратких доказательств и уделение внимания занимательным соотношениям и фактам. Современный математик Хассе пишет в предисловии к своей популярной книге: «Математика имеет свои «последние квартеты Бетховена», которые существуют только для посвящённых, но в ней существуют и свои «шубертовы песенки» («Schubert-Lieder»), доступные непосредственно всем». Подобрать некоторое количество последних, сообразуясь с размерами книги, стремился автор, помня слова составителя первой печатной книги по занимательной математике Алберти (XV в.), заявившего, что он «больше старался помочь многим, чем угодить немногим (избранным)».

Стиль этой книги отличен от обычного стиля учебника, представляющего «склад, в котором для каждой вещи есть своя полочка». Здесь читатель получает сведения как исторические, так и теоретические в виде отдельных рассказов. Поучительно привести в этой связи рассказ старого писателя Н. Н. Златовратского о том, как он стал понимать математику, по которой в гимназии получал двойки. Отец мальчика направил сына к учителю другой школы С., известному своей строгостью. Вот что о последующем рассказывает Златовратский («Воспоминания», 1956, стр. 71):

«Принял он меня хотя и с обычной суровостью, но «по-семейному» и, нисколько не интересуясь, знаю ли я что-нибудь по его предмету и как, он без всяких предисловий приступил к ознакомлению меня с самыми элементарными основами математики, как будто я никогда не учился в гимназии и не сидел в ней уже четыре года. Протестовать я, конечно, не решался. Он прямо начал объяснять мне совершенно просто, «по-человечески», именно по-человечески, нумерацию и затем шаг за шагом все те необыкновенно просто и логически вытекающие одно из другого действия, которые мне казались раньше чуть ли не кабалистикой... Урок, другой, третий, и я каждый раз стал уходить от него как будто всё более и более духовно окрылённым. Прошло два месяца, и я уже был осиян настоящим откровением. Господи! Да неужели же я не идиот, не тупица, как уже начинали говорить обо мне мудрые гимназические педагоги?.. С. был, по-видимому, мной тоже доволен, но не показывал вида, он даже не интересовался тем, за что и почему я получал в гимназии двойки и единицы... По прошествии двух месяцев С. сказал отцу лаконично: «Будет, довольно... Больше сыну ко мне ходить незачем пока... Пусть готовится к экзамену». Я... выдержал, наконец, экзамен, получив по математике «удовлетворительно», к изумлению нашего педагога, не решавшегося мне ещё поставить лучший балл. Замечательно, что с тех пор я уже не получал ниже четырёх по всем отделам математики, а на выпускном экзамене имел полные пятёрки».

Разговорный стиль в сообщении исторических сведений естествен, но автор излагает и теоретические сведения в том же разговорном стиле. Он вспоминает, как по окончании учительской семинарии, в которой в те времена алгебра почти не изучалась, готовясь к экзамену на аттестат зрелости экстерном, он находил облегчение в понимании материала по учебнику алгебры Н. А. Шапошникова, в котором, в отличие от учебника А. П. Киселёва, многое излагалось разговорным стилем. Он мог бы после чтения разговорного изложения алгебры Н. А. Шапошниковым повторить слова французской учительницы, которая писала автору знаменитой «Арифметики дедушки» (Ж. Массэ), изложенной разговорным методом: «Теперь я научилась понимать то, что я до сих пор делала».

Автор надеется, что его книгу будут читать и отдельные учащиеся. Воспитание у учащихся навыка к чтению математической книги есть важное средство улучшения их математической подготовки, конечно, наряду с усовершенствованием методов обучения.

* * *

Не считая нужным разъяснять здесь, какое значение имеет знание учителем истории преподаваемого им предмета, автор ограничивается приведением высказывания А. М. Горького: «В каждом деле нужно знать историю его развития. Если бы рабочие каждой отрасли производства знали, как она возникла, как постепенно развивалась, они работали бы с более глубоким пониманием культурно-исторического значения их труда, с большим увлечением» (М. Горький, О том, как я учился писать).

Подробное раскрытие смысла этого замечания для учителя, говоря языком старинного автора, «собственной себе книги требует и зде не вмещается». Автор писал не учебник, а книгу, являющуюся пособием для учителя. Он не предполагает, что читатель выучит материал книги, будет помнить выученное и применять усвоенные сведения в нужном случае. Этого трудно ожидать и в том случае, когда книга является систематическим изложением истории арифметики.

Автор рассчитывает на то, что учитель познакомится с содержанием книги и затем по мере надобности будет обращаться к отдельным её параграфам, используя их в работе с учащимися. Для более успешного использования книги рекомендуется факты, кажущиеся учителю полезными, заносить на карточки и подбирать карточки по отдельных темам школьной программы.

Сообщаемые в книге факты иногда могут показаться примитивными, недостаточно «научными», но 60 лет учительского стажа автора (от начальной сельской школы до университета) убедили его в полезности использования и таких «примитивов» для поднятия интереса к предмету. Признание учителем полезности для работы знания того или иного факта, кажущегося малозначащим, нейтрализует для автора десяток упрёков в недостаточной серьёзности его книги. Ему памятны слова первого известного по имени русского математика, числолюбца Кирика Новгородского (XII в.): «По малу бо создаётся град и велий бывает: тако и ведание по малу на много приходит». Помнит автор и многократные внушения своего учителя, крупного учёного и педагога, профессора Ю. В. Сохоцкого: «Не пренебрегайте мелочами».

Не зная никого из историков математики, кто захотел бы приняться за труд создания книги, отвечающей потребности и запросам школы, автор делает эту попытку помочь учителям в напряжённый период перестройки системы народного образования. Автор надеется, что знание учителем истории арифметики поможет приблизить к жизни её изучение.

При избранном характере книги и способе изложения некоторые мысли и факты невольно повторяются, так как о них приходится говорить в связи с разными темами. От этого нарушается требование математического стиля изложения, которое требует:

«Имей что сказать и не повторяй этого дважды!» Такое требование законно для трактата, написанного для специалиста-математика, но не для книги, адресованной начинающим изучение или использующим её в работе с учащимися. Автору памятны книги его незабвенного учителя академика А. А. Маркова «Исчисление вероятностей», «Исчисление конечных разностей» и др. Книги эти признаны идеальными, и, пожалуй, единственными в мировой литературе по стилю: в них нет ни одного лишнего слова и есть всё необходимое для понимания излагаемого. Однако какими трудными они кажутся тем читателям, которые по ним начинают изучение соответствующих предметов!

При изложении нового предмета начинающим, вопреки требованию «не повторяй этого дважды!», нужно повторять новое понятие дважды и трижды. Исходя из этого педагогического требования, автор предлагаемой книги не счёл необходимым тщательно избегать повторения уже ранее сказанного, но сказанного в большинстве случаев в другой форме и с другой целью.

В книге даны указания на источники, в которых читатель найдёт более расширенное изложение рассматриваемых вопросов или дальнейшие сведения по существу их. В тексте книги называются работы, которые сравнительно легко могут быть найдены каждым читателем. Более редкие источники, равно как сведения, выходящие за пределы школьной арифметики, указаны в примечаниях. Этих указаний, относящихся часто к книгам, не являющимся математическими, довольно много. Расширение общего кругозора читателя, о чём, по словам старого автора, «надлежит наипаче старатися», является одной из целей книги. Давая многочисленные ссылки на разные источники, автор питает надежду, что использующий книгу прочтёт тот или другой из них.

Довольно часты в книге вторжения автора в область художественной литературы. Эти вторжения, помимо того, что они часто в доступной и убедительной форме разъясняют сущность математической идеи, имеют и воспитательное значение. Это пример того, как учащимся нужно внушать, что математические идеи и математический язык не суть достояния только учебника математики, что и писатель и поэт, не думая об учебнике, следуют идеям математики и пользуются её языком, который должен быть понятным каждому культурному человеку.

«Учение есть труд и должно оставаться трудом, но трудом, полным мысли, так чтобы самый интерес учения зависел от серьёзной мысли, а не от каких-либо не идущих к делу прикрас»,— говорит К. Д. Ушинский («Избранные педагогические произведения», т. I, 1939, стр. 177). Это относится, конечно, и к арифметике, уроки которой должны быть серьёзным трудом. Учащемуся, начиная с семилетнего возраста, на уроках арифметики прививаются важные истины. Но «навязанное не привязано», говорит известный методист С. И. Шохор-Троцкий. Изложенные в книге исторические очерки написаны в надежде содействовать «привязыванию» арифметических знаний учащимся и адресуются «всем люботщателям честной сей мудрости».

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

1. О ПРОИСХОЖДЕНИИ МАТЕМАТИКИ

Математика, как и все другие науки, возникла из потребностей практической деятельности людей. На очень ранней ступени развития у человека возникла необходимость подсчитывать количество добычи или урожая, измерять земельные участки, определять вместимость сосудов, вести счёт времени. Для удовлетворения этих практических потребностей возникли примитивные способы счёта и измерения, т. е. начала арифметики и геометрии [1].

При дальнейшем развитии общества усложнялась практическая деятельность человека, а вместе с ней росли потребности в усовершенствованных приёмах счёта и измерений. Первоначальный счёт по пальцам и измерения при помощи размеров частей человеческого тела (пядь, локоть) не могли уже удовлетворять потребностям жизни. Возникла необходимость в более быстрых и более точных приёмах счёта и измерений. Продолжительный опыт привёл человека к установлению некоторых общих правил, дающих возможность при счёте конкретных предметов не прибегать в каждом отдельном случае к непосредственному перечислению и перекладыванию этих предметов. Постепенно человек приобрёл способность отвлечения, абстрагирования от конкретного счёта.

«Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определённую форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было дойти до понятия фигуры» (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1953, стр. 37).

Многолетняя практика каждого народа ещё в древности выработала основные понятия счёта и измерения — арифметики и

---

[1] Об этом более подробно рассказывается в книге: И. Я. Депман, Мир чисел, Л., Гос. изд-во детской литературы, 1963.

геометрии. В дальнейшие тысячелетия практический опыт применения этих понятий, дополняя первоначальный запас сведений о способах счёта и измерения, привёл к новым абстракциям, к усовершенствованию приёмов арифметики и геометрии. Возникают новые, более совершенные возможности познания количественных отношений предметов и явлений окружающего мира и вместе с тем возможность использования этого познания в трудовой деятельности. Человек от живого созерцания окружающего мира переходит к абстрактному мышлению о явлениях этого мира. Благодаря этим абстракциям человек вникает более глубоко в закономерности мира и получает возможность более плодотворного использования своих знаний для практической деятельности.

Возникновение основных понятий арифметики и геометрии из практической деятельности и долгий опыт их применения создают у человека уверенность в правильности выводов, полученных путём абстрактного мышления.

«Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, *дабы* эти фигуры *могли* получить значение *аксиом*» (В. И. Ленин, Философские тетради, 1947, стр. 164).

В результате отражения свойств и закономерностей объективного мира в сознании человека возникают математические понятия и математические аксиомы — исходные положения математики.

Признавая неразрывную связь математических абстракций с действительностью и практикой человека, мы в то же время должны помнить, что математика охватывает лишь количественные и пространственные отношения объективного мира, явления которого бесконечно более сложны и бесконечно более богаты содержанием.

Но эти явления изучаются другими науками, столь же необходимыми для создания полной картины об окружающей нас действительности, как и математика.

«Для *истины* нужны и другие стороны *действительности*, которые тоже лишь кажутся самостоятельными и отдельными (особо для себя существующими). *Лишь в их совокупности* и в их *отношении* реализуется истина» (В. И. Ленин, Философские тетради, 1947, 169).

Математическое изучение явлений мира должно происходить совместно с познанием других сторон окружающего мира — только при этом условии оно приближает нас к истинному познанию. Не только отрыв математической абстракции от практики человека, но и отрыв математики от познания других сторон объективного мира является метафизическим, антинаучным.

Всё сказанное можно выразить в следующих положениях:

1. Понятия арифметики, как и математики вообще, отражают количественные отношения совокупностей, или множеств, предметов. Возникли эти понятия путём отвлечения, абстракции, на основе анализа и обобщения практического опыта. Рассказ об этом процессе возникновения и обобщения, составляющий содержание этой книги, доказывает всю ошибочность идеалистических взглядов о том, будто понятия математики происходят из «чистого мышления». Голосом из допотопного мира для нас звучит циркуляр царского министерства народного просвещения, воспрещавший в преподавании «все суетные догадки о происхождении наук из практики».

2. Убедительность правил и выводов арифметики для человека основывается на опыте необозримого ряда поколений людей; опыт этот закрепился в названиях чисел, обозначениях, в постоянном повторении одинаковых операций с числами, в беспрерывном их практическом применении. Убедительность арифметики и правил логики опирается на тот факт, что они являются отражением объективных закономерностей окружающего нас мира.

3. Арифметика при всей отвлечённости её понятий имеет широкие применения потому, что она, обобщая огромный опыт человека, выражает количественные отношения действительности, которые встречаются повсюду. Но, с другой стороны, отвлечённость понятий арифметики является причиной ограниченности их применения. Арифметические действия над числами, представляющими количественную характеристику предметов, не исчерпывают конкретных свойств соответственных операций над этими предметами: в отвлечённых числах $2+2=4$ и 2 *л* воды плюс 2 *л* воды вместе составят 4 *кг* воды, но 2 *л* спирта и 2 *л* воды при «сложении» дадут не 4, а 3,6 *кг* смеси. Для изучения конкретных явлений нужно познание других сторон явлений, помимо количественных.

4. Движущей силой безграничного развития арифметики является та же практика, которая создала первые её понятия. В постоянном взаимодействии с отвлечённым мышлением возникают новые виды чисел и действий над ними, которые позволяют более глубоко познать действительность, совершенствуют практическую деятельность человека. В арифметике мы имеем частный случай общего всему познанию взаимодействия практики и абстрактного мышления, практики и теории.

Изложенная точка зрения на сущность и методы математического познания подробно обосновывается в книге «Математика. Её содержание, методы и значение» (изд. Академии наук СССР, том I, глава 1, 1956). Наша книга иллюстрирует эти положения на большом числе исторических очерков развития отдельных вопросов арифметики.

2. ЧИСЛО И МНОЖЕСТВО

Математика есть наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Основным средством при установлении и изучении количественных отношений действительного мира является число. Оно нужно человеку для количественного сравнения между собой двух множеств или совокупностей предметов[1] [1].

Над числами устанавливаются и производятся человеком необходимые для решения практических задач действия: сложение, вычитание, умножение, деление. «Как и все другие науки, математика возникла из *практических нужд* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики» (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1957, стр. 37). На первых ступенях практической деятельности человека возникли понятия чисел «один», «два», «три». Когда это случилось — об этом наука может сказать пока мало определённого [2]. Мы не можем представить себе жизнь человека, который не имеет никаких числовых понятий.

Имеется много книг, изображающих жизнь первобытного человека. Среди них есть, например, книги, описывающие, «как человек без кузнеца жил», иными словами, как жил человек, не знающий употребления металлов. Когда-то была объявлена большая премия за написание книги «Как человек без числа жил». Однако премия осталась невыданной: по-видимому, ни один исследователь-писатель не был в состоянии изобразить жизнь человека, не имеющего никакого понятия о числе.

Перед человеком в его практике всё время возникала необходимость иметь дело с совокупностями вещей, сравнивать их численность. Он воспринимал численность совокупности вещей без счёта их. О численности группы пяти вещей он говорил: «столько же, сколько пальцев на руке», о группе из двадцати вещей — «столько же, сколько пальцев у человека», и т. д. Отвлечённых понятий чисел «пять», «двадцать» у человека долго не было. Аналогично этому человек, не имея отвлечённых понятий «чернота», «твёрдость», говорил о предметах: «как ворон» (чёрный), «как камень» (твёрдый).

В результате очень долгого периода развития человек пришёл к пониманию того, что совокупности «пять пальцев», «пять собак», «пять домов» имеют некоторое общее свойство, которое можно выразить с помощью понятия отвлечённого числа «пять». Всё сказанное приводит к следующему определению числа:

«Каждое отдельное число, как «два», «пять» и т. п., есть свойство совокупностей предметов, общее для всех совокупностей,

---

[1] Указания [1], [2]... означают ссылки на примечания, помещённые в конце книги. Основной текст является связным и без примечаний, которые при первом чтении книги могут быть пропущены.

предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у таких совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно» («Математика. Её содержание, методы и значение», т. I, стр. 12). Как происходил процесс возникновения понятия отвлечённого числа, иллюстрируется на последующих страницах книги [3].

Итак, согласно сказанному перед человеком в его практике возникла задача количественного сравнения совокупностей предметов. Нам теперь кажется, что для такого сравнения надо сосчитать предметы в одной и другой совокупностях и сравнить полученные числа. Возникает вопрос, необходимо ли должно было возникнуть сначала понятие числа, чтобы появилась возможность устанавливать количественные соотношения между совокупностями объектов? На этот вопрос приходится ответить отрицательно.

Ребёнок, который ещё не умеет считать до пяти, может установить, что у него пальцев на обеих руках одинаковое количество. Он может сопоставить пальцы обеих рук и убедиться в этом.

Примитивный человек из лесов Центральной Африки умел считать в крайне ограниченных пределах, скажем, только до трёх, но, несмотря на это, он уверенно обменивал большое количество слоновых клыков на пачки табака, не боясь быть обманутым заморскими купцами. Для этого он сопоставлял количество клыков с количеством пачек табака, укладывая рядом каждый клык с пачкой табака и таким образом убеждался в равночисленности обмениваемых совокупностей предметов.

Описание такой картины счёта при обмене, более близкой нам и по времени и месту, мы находим в художественной литературе. Так, например, советский писатель-этнограф Г. Гор записывает слова нивха (гиляка) — представителя маленького народа северного Сахалина:

«Был у нас старик. Не знал, сколько ему лет. Решил начать счёт. Год пройдёт — рыбью голову в амбар положит. Опять год пройдёт — опять голову и так далее» (Геннадий Гор, Юноша с далёкой реки, Ленинград, «Советский писатель», 1958, стр. 175).

Другой советский писатель Т. Сёмушкин в повести «Алитет уходит в горы» (1955, стр. 186) даёт интересное описание товарообмена путём попарного сопоставления предметов обмена.

Американец собирается предложить чукчам прейскурант (список с ценами) предлагаемых им товаров. Возникает уточняющий диалог между представителем Советской власти и американцем:

— Живой надо для них прейскурант, мистер Саймонс, а не мёртвый! — сказал Лось.

— Я вас не понимаю!

— Вот, скажем, тюк кирпичного чая — 80 кирпичей. Сто́ит он

Георг Кантор.

80 рублей. На него сверху положить 2 песца по 40 рублей. Винчестер — под ним тоже 2 песца. Пачку патронов, 20 штук, положить на 2 нерпичьих шкуры, ведь они по рублю стоят, патроны 2 рубля. Это будет понятно всякому, даже неграмотному охотнику.

Описанное в приведённых примерах попарное сопоставление предметов (элементов двух множеств) в науке называется «установлением взаимно однозначного соответствия между элементами двух множеств». Как видим, под этим громоздким названием подразумевается простая операция, которую может придумать и маленький ребёнок и первобытный человек. Эта операция играла очень большую роль в развитии арифметики.

Итак, понятия «равно», «больше», «меньше» не требуют предварительного наличия у человека понятия числа, они возникают уже на той стадии развития человека, когда у последнего ещё нет понятия числа, давая ему возможность устанавливать количественные соотношения между группами объектов. И после того, когда у человека уже сложилось понятие числа, он вновь и вновь возвращается к той материальной первооснове — конкретному множеству, из которой возникло абстрактное понятие числа.

У Геродота — греческого историка V в. до н. э. (кн. IV, 98) читаем: «Персидский царь Дарий, оставив на время похода (в южнорусские степи) греков для охраны моста, построенного им через Дунай, сказал: возьмите этот ремень и, начиная с того дня, как я пойду на скифов, развязывайте на нём каждый день по одному узлу; когда минует число дней, означенное узлами, и я не вернулся, плывите обратно на родину». Аналогичный приём описывает Т. Сёмушкин в упомянутой уже повести: «Чукче Омрытагену оставили связку пуговиц. Он их по одной снимает каждое утро. Кончится вся связка, тогда он поедет на «праздник говоренья» (конференцию)». Здесь мы в том и другом случае имеем то же обращение к множествам объектов, породившим числовое понятие, какое повторяет учитель арифметики в начальных классах, приглашая учеников считать с помощью кубиков, палочек, пальцев.

Итак, в математике вначале было не число, а множество. Анализ понятия множества и выяснение его подлинного значения в математике есть заслуга главным образом немецкого математика Георга Кантора (петербургского уроженца, 1845—1918). Созданная им теория множеств, некоторые идеи которой имелись и у предшественников Кантора и в частности были сравнительно подробно разработаны у чешского философа Больцано (1781—1848, [4]), лежит ныне не только в основе математического анализа, но и проникает в известной мере в учебники школьной арифметики и алгебры (укажем для примера учебники И. К. Андронова «Арифметика натуральных чисел», Учпедгиз, 1954 и «Арифметика дробных чисел и основных величин», Учпедгиз, 1955).

3. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Современный человек уже в ранние годы жизни легко приобретает способность считать, называя числа один, два, три, четыре и т. д. Этот числовой ряд мы называем натуральным, элементы его — натуральными числами. Уже греческий математик Никомах (I в. н. э.) говорит о натуральном, т. е. естественном, ряде чисел. Термин «натуральное число» впервые употребляет римский автор Боэций (475—524). Время от времени термин этот встречается затем в рукописях XI в. и позже. В современном смысле понятие «натуральное число» и последовательное употребление термина находит применение у французского просветителя Даламбера (1717—1783) в изданной им в сотрудничестве с другими передовыми писателями Франции того времени «Энциклопедии» (1751—1780) [1]. С этого времени термин «натуральное число» вошёл постепенно во всеобщее употребление.

История возникновения и эволюции у человека представления о натуральном ряде охватывает данные из всех областей истории культуры — способов производства, языка, литературы, верований и т. д. Свидетельства этнографов убеждают нас в том, что до сих пор существуют племена, не имеющие числительных, кроме один, два, три. Более многочисленная группа предметов у них характеризуется словами «много», «куча», «тьма». Эскимос знает и хранит в памяти не число своих собак, а индивидуальные особенности каждой, подобно тому как ребёнок, не умеющий ещё считать, представляет свои куклы и игрушки по их признакам [2].

Такую стадию развития своих числовых представлений переживало всё человечество. Во многих языках, в том числе славянском, существуют такие грамматические формы, как един-

---

[1] Даламбер Жан Лерон — виднейший французский философ и математик XVIII в. Ближайший соратник Дидро в издании «Энциклопедии». Редактировал по 1757 г. ее математический отдел. (*Ред.*)

[2] В языке индейцев берегов реки Амазонки (Южная Америка) число три называется поэттаррароринкоароак («Энциклопедия чистой математики» Д. Пикока).

ственное число, двойственное число и множественное число; слово, обозначающее предмет, имеет различные окончания, в зависимости от того, идёт ли речь об одном, о двух или более чем о двух предметах. В некоторых языках имеется ещё особая форма тройственного числа. Эти языковые формы являются пережитками той отдалённой эпохи развития, в которую человеком были освоены лишь числа один и два или один, два и три; всякая более многочисленная группа предметов характеризовалась словами «много», «тьма» [5].

В замечательном памятнике древнерусской литературы «Поучение Владимира Мономаха», написанном лет восемьсот назад, формы слов в различных падежах совпадают с современными, когда речь идёт об одном или о многих предметах (формы единственного и множественного чисел). Когда же говорится о двух предметах или парных, появляется непривычная нам форма: «Конь диких **своима рукама** связал есмь. А лось **рогама бол...**» В этом отрывке, понятном по смыслу, подчёркнутые слова имеют форму двойственного числа (речь идёт о двух руках, о двух рогах).

Исчезновение двойственного числа в русских памятниках начинается с XIII в. Наиболее ранний пример употребления формы множественного числа вместо двойственного обнаружен в литературном памятнике 1219 г. (Акад. А. И. Соболевский, Лекции по истории русского языка, М., 1907, стр. 205).

Наибольшее освоенное число натурального ряда, граничащее с несчитаемым, часто приобретало особый ореол чудесного и, по-видимому, служило основанием для возникновения суеверий, связанных с разными числами, сохранившимися в языке до сих пор.

Француз даёт самую сильную клятву словами: «крепко, как семь». У греков семь чудес мира, семь мудрецов. У реки Нила семь рукавов (на самом деле их было больше). Счастливый чувствует себя на седьмом небе (считает себя «бесконечно» счастливым). Такой же смысл имеют русские пословицы и поговорки с числом **семь**: «У семи нянек дитя без глазу», «Семь раз мерь, один раз отрежь», «За семь вёрст киселя хлебать», «Семеро одного не ждут». Во всех этих поговорках «**семь**» означает «**много**», когда-то, вероятно, означало «бесконечно много». Про непонятное мы и теперь говорим, что это книга «за семью печатями», а сказки повествуют о «семимильных сапогах». Знахарки в русских сказках дают больной «7 пакетиков с лечебной травой, которую надо настоять на 7 водах и в течение 7 дней принимать ежедневно по 7 ложек». Очевидно, что здесь вера в чудодейственную силу лечения опирается на многократно повторяемое число семь.

Противники Галилея (1564—1642) утверждали, что на основании приведённых ими фактов (в голове животных имеется «7 окон», существует 7 металлов) и «многих других явлений природы исчисление коих было бы обременительно, мы заключаем, что и планет необходимо должно быть только 7».

Суеверия, связанные с числом 13, не менее распространены. В Париже существовали (а, может быть, ещё и теперь существуют) конторы для доставления «четырнадцатого», если на обеде где-нибудь собравшихся оказалась «чёртова дюжина».

В некоторых американских высотных домах нет тринадцатого этажа и в гостиницах нет тринадцатого номера, так как население избегает этих номеров.

В Лондоне ещё в 1930 г. городским властям было подано ходатайство с подписями весьма значительного числа жителей о снятии с домов тринадцатых номеров. С другой стороны, за катафалком покойника в Англии должно следовать именно тринадцать карет. «В самом хвосте процессии шла пустая карета, которая участвовала в похоронной процессии только для того, чтобы общее число экипажей равнялось тринадцати» (Джон Голсуорси, Сага о Форсайтах, М., 1946, т. I, стр. 96).

Представление о числе **тринадцать**, как приносящем несчастье, могло возникнуть в связи с тем, что, освоив числовой ряд до двенадцати, человек считал 12 последним числом, символом полноты; следующее за ним число являлось лишним, потому «нечестивым» и приносящим несчастье.

Интересную особенность в отношении суеверий, связанных с числом 13, можно отметить у славян. Ни в Византии, ни на Западе не встречается храмов с тринадцатью куполами. В древней Руси, напротив, это не только допускалось, но сделалось характерным каноном. Первый Софийский собор в Новгороде, построенный в 989 г., был дубовый, с тринадцатью куполами. Такой же храм вскоре появился в Полоцке. Киевская София — уже каменная, также тринадцатиглавая.

Историк Б. Д. Греков считает такую традицию построения тринадцатиглавых храмов в трёх крупнейших центрах древней Руси сознательным выражением идеи культурного и политического единства Руси. Для нас в этом явлении интересно и то, что распространённое у многих народов и существующее до сих пор суеверие не имело места у славян.

Число **сорок** играет в преданиях многих восточных народов особую роль. В нашей Средней Азии существовало поверье, нынешним поколением забытое, о таинственной общине — чильтане, состоявшей из сорока человек, якобы обладавших сверхъестественными качествами. Чильтан по преданиям возглавлялся семёркой старших, те в свою очередь — тройкой, и последняя, наконец, единым главой. По выбытии кого-нибудь из сорока членов чильтана число членов его пополнялось до сорока [6].

Киргизский народный эпос воспевает героя Манаса с 40 товарищами, напоминая русские былины о сорока богатырях. В наши дни со слов каракалпакского народного певца записан национальный эпос «Сорок девушек». Подобное отношение к числу сорок имеет место и во Франции, где «Французская академия», или «Академия сорока бессмертных», состоит из сорока лучших французских писателей, которые в случае выбытия кого-нибудь из своих членов восполняют состав «Академии» путём выборов до сорока.

Поверья, связанные с числом 40, перешли к русским: сороковой медведь для охотника — «судьбинный», редко какой охотник уйдёт от следующего, «сороковому медведю указан срок жизни охотника» (М. Горький, Заметки из дневника. Знахарка); у Некрасова также сороковой медведь «судьбинный»:

> Сорок медведей он взял на рогатину,
> На сорок первом сплошал!

Повесть Б. Лавренёва и сделанный по ней фильм «Сорок первый» напоминают то же народное поверье о числе сорок.

Полная охота у русских вельмож состояла из сорока псарей, сорока егерей, сорока гусаров, из сорока гончих, сорока борзых собак и т. д.— всё по сорока, как видно из описания охот вельмож Шереметьева и Орлова (М. И. Пыляев, Забытое прошлое окрестностей Петербурга, Спб., 1889, стр. 143, 413 и др.).

Выражение «сорок сороков», часто употребляемое в русской речи, является обозначением очень большого, неопределённо большого или бесконечно большого, как сказали бы мы теперь, числа. Название насекомого «сороконожка» (научное название Polixenus lagurus) означает не то, что у него сорок ножек, а то, что у него ножек много, это — «многоножка». У других народов сороконожка называется «тысяченожка» [1] (в зоологии Myriadopoda — мириадоножка, подобно тому, как всевидящая богиня египтян Исида называлась «мириадоименной» или «мириадоглазой»; мириада, греческое название 10 000, здесь обозначает очень большое или бесконечно большое число).

Первоначальной родиной всяких суеверий считался древний Вавилон. У Татьяны из «Евгения Онегина» в руках «Мартын Задека, глава халдейских мудрецов, гадатель, толкователь снов» [2]. Числовые суеверия также имели широкое распространение в Вавилоне [7]. Вавилонские астрономы, они же астрологи, наблюдали движения семи небесных тел (Солнца, Луны, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна) и по ним предсказывали будущее. Возможно, что приписывание особой роли числу семь получило отсюда начало.

Особое положение числа сорок в преданиях азиатских народов могло быть вызвано способом счёта некоторых народов,

---

[1] Тысячи ножек ни одна из многоножек не имеет, но сотню-другую может иметь. Известны многоножки со 172 парами ног (А. Брем, Жизнь животных).

[2] *Халдея* — часть Ново-Вавилонского государства, образовавшегося в VII в. до н. э.

Рис. 1. Смерть Архимеда. Мозаика, вероятно, из школы Рафаэля. (Городская галерея во Франкфурте-на-Майне.)

о чём будет сказано в разделе «Происхождение некоторых названий чисел».

Врезавшиеся в память человечества воспоминания об отдельных числах как этапах развития натурального ряда свидетельствуют, во всяком случае, о том, что человеческая мысль с большим трудом осваивала этот ряд. Потребовались многие тысячелетия, пока люди пришли к выводу о неограниченности этого ряда и поняли, что не существует наибольшего числа. Эту мысль можно найти у греческого математика Архимеда (287—212) в его сочинении «Псаммит, или исчисление песчинок» [1]. К содержанию этой книги Архимеда мы вернёмся в главе о больших числах. Как увидим в дальнейшем, Архимед в «Псаммите» показывает, что числовой ряд можно продолжать неограниченно, но для реальных задач достаточно очень небольшого отрезка этого ряда.

У греческого трагика Эсхила (525—456 гг. до н. э.) Прометей,

[1] Последнее отдельное русское издание 1932 г. и в собрании сочинений Архимеда, 1962.

прикованный богами к Кавказской скале за сообщение людям того, что должно было остаться в ведении одних богов, говорит:

> Послушайте, что смертным сделал я...
> Число им изобрёл
> И буквы научил соединять...

Конечно, человек ценил числа прежде всего за ту пользу, какую они приносят в борьбе за существование.

4. УСТНАЯ НУМЕРАЦИЯ

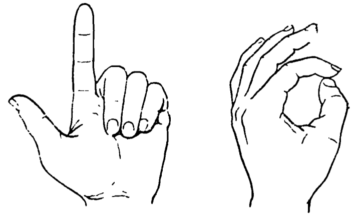
Перед людьми, освоившими натуральный ряд чисел до некоторой достаточно далёкой границы, встала необходимость создания удобных способов называния и записи чисел. Нужно было решить задачу создания устной и письменной нумерации. В разные эпохи отдельными народами эта задача решалась различно.

При значительном объёме числового множества, которым человек владел, нельзя было ограничиться примитивным способом, дающим каждому числу своё особое название. Человеческая память ограниченна. Язык американского крестьянина, над которым производились статистические наблюдения, содержит около 800 коренных слов. Язык великих мастеров слова несравненно богаче, но многих слов, употребляемых ими, рядовой читатель не знает или не помнит. Для понимания сочинений Шекспира, например, необходим специальный словарь, содержащий тысячи слов, непонятных даже для хорошо знающего английский язык. Эти факты показывают, сколь безнадёжно было бы счисление, которое каждому числу присваивало бы особое название. Но люди вскоре догадались, что считать надо группами, называя группы теми же именами числительными, как единицы, но с добавлением названий групп.

Разные народы употребляли различные счётные группы. Большинство народов употребляло и употребляет десятичные группы счёта или десятичную систему счисления. Для составления названий чисел по этой системе нужно иметь десять слов для называния первых десяти чисел и затем названия для новых счётных групп — сто, тысяча и т. д.

5. ПАЛЬЦЕВОЙ СЧЁТ

Единственной причиной, заставившей большинство народов избрать десятичную систему счисления, является наличие у человека на руках десяти пальцев, которые служили удобнейшей вещественной основой счёта. Десять пальцев — это то стандартное множество, с которым сравнивал первобытный человек всякое другое множество до тех пор, пока у него не образовалось в сознании новое стандартное множество, в виде абстрактного ряда натуральных чисел. Историческую роль пальцев при образовании числовых понятий мы вспоминаем каждый раз, когда советуем ученику считать по пальцам. Об этой роли напоминают и языковые факты.



9 30

Рис. 2. Примеры изображения чисел на пальцах: левое — число 9, правое — 30.

В «Арифметике» Магницкого[1] числа 1, 2, 3... 9 называются «перстами», нуль называется «низачто», полные десятки — «составами», числа, состоящие из десятков и единиц,— «сочинениями». Эти названия являются аналогами таких же названий в европейских языках. Впервые у Герберта (940—1003; с 999 г. римский папа Сильвестр II) встречаются для чисел в пределе сотни: digiti — пальцевые числа 1, 2... 9 (digitus — палец), articuli — суставные числа, полные десятки, compositi — составные, из десятков и единиц. Английский язык до сих пор обозначает и первые девять чисел и цифры словом digits, представляющим производное от латинского digitus — палец. Итальянский математик Леонардо Пизанский (начало XIII в.) и авторы, знакомые с арабской арифметикой, употребляли терминологию: unitates — единицы, deceni — десятки; авторы эпохи Возрождения — соответственные греческие слова monadici (единицы), decades (десятки). Термин «десятичная, или декадная, система счисления» становится широко употребительным с конца XVIII в.

Пальцевой счёт — обозначение чисел при помощи пальцев — обладал не только большой наглядностью, но и был вызван практическими потребностями. Приёмы его излагались ещё в учебниках XVI в., например у Рикорда (1510—1558).

Пальцевой счёт был необходим в торговых местах, где сталкивались представители разных народов, не имевших общего языка. Практическая необходимость выработала общий пальцевой счёт, понятный без слов, и этому счёту обучали детей в школе. Римский писатель Цицерон (I в. до н. э.) в одной из своих речей клеймит низкий уровень преподавания в римской школе, где таблица умножения заучивается только до пяти, а дальнейшая её часть восполняется счётом на пальцах. Что это возможно, видно из тождества:

$$10[(a-5)+(в-5)]+(10-a)\cdot(10-в)=aв,$$

которое сводится к практическому правилу: для перемножения чисел a и $в$, которые оба больше пяти и меньше десяти, нужно вытянуть на одной и другой руках столько пальцев, на сколько единиц данные числа, каждое в отдельности, превышают 5; сум-

[1] О нём см. последнюю главу книги.

ма чисел вытянутых пальцев даёт десятки произведения; к ним надо прибавить произведение чисел, соответствующих остающимся загнутым пальцам $(10-a)$ и $(10-в)$; оба эти числа меньшие пяти.

Пример. Найти произведение 7×8. Вытянем на одной руке 3 пальца, на другой 2 пальца. Загнутыми остаются на первой руке 2, на второй 3 пальца. Сумма чисел вытянутых пальцев 5 даёт десятки искомого произведения, произведение чисел загнутых пальцев $2 \times 3 = 6$ есть число единиц произведения: $7 \times 8 = 5 \times 10 + 6 = 56$.

В математической литературе не раз указывалось, что пальцевой счёт очень распространён среди молдаван и валахов, и якобы идёт от римлян, так как эти народы образовались от смешения римских легионеров, поселённых в Дакии (придунайские земли) для охраны Римской империи от натиска народов, наступавших на неё из южнорусских степей. Распространён пальцевой счёт и по настоящий день у многих народов, причём используются и пальцы ног. Любопытен факт, сообщаемый работавшим в Америке польским математиком Л. Ч. Карпинским (умер в 1955 г.) в его «Истории арифметики»: на крупнейшей мировой хлебной бирже — Чикаго — предложения и запросы любого количества пшеницы, равно как цены, объявляются маклером на пальцах без единого словесного добавления.

Об исторической роли пальцевого счёта говорят и названия числительных у разных народов: часто число пять называется «рукой», десять — «две руки», двадцать — «весь человек», т. е. 2 руки и 2 ноги. Существование у ряда народов двадцатеричной системы счисления (у майя в Центральной Америке, у басков, у кельтских народов в прежние времена) имеет, по-видимому, ту же основу — пальцевой счёт [1].

6. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ ОСНОВАНИЕМ ЧИСЛО, НЕ РАВНОЕ ДЕСЯТИ

За счётную группу, или основание системы счисления, можно принять любое число. Это положение явным образом было высказано французским математиком Б. Паскалем в 1665 г.

Некоторые из систем счисления, основания которых отличны от десяти, употреблялись или предлагались в разное время.

Естественным является предложение, что до того как человек пришёл к десятичному счислению, он пользовался при счёте пальцами одной руки. Это привело его к созданию пятеричного счисления.

---

[1] Воспоминанием о некогда употреблявшемся пальцевом счёте является фраза «по рукам», выражающая в разговоре согласие на предложение.

Следы пятеричной системы счисления, которой пользовались когда-то, вероятно, все народы, сохранились в римской письменной нумерации. Цифры 6, 7, 8 в этой нумерации имеют вид:

$$\mathrm{VI} = \mathrm{V} + \mathrm{I}, \quad \mathrm{VII} = \mathrm{V} + \mathrm{II},$$

$$\mathrm{VIII} = \mathrm{V} + \mathrm{III}.$$

Блез Паскаль.

С несомненностью можно установить ясные следы пятеричного счисления у чукчей. Вот что сообщает о них уже не раз цитированный писатель Т. Сёмушкин, который работал ряд лет у чукчей:

«Уроки арифметики чукотские дети любили не менее «разговора на бумажке» (чтения и письма). Но здесь помехой являлся их обычный счёт пятёрками, по числу пальцев на каждой руке и ноге. Взрослые чукчи таким счётом пользуются очень хорошо в пределах тысячи. Они редко ошибаются, хотя считают довольно долго. Для большего удобства они иногда снимают обувь, и счёт производится на двадцати пальцах рук и ног. Пять человек составляют сотню.

Проезжая однажды мимо стойбища, я заметил на склоне стадо оленей. Я насчитал 128 оленей. Когда я спросил хозяина, сколько у него оленей, он ответил:

— Мы не считали. Но если хоть один олень пропадёт из стада, глаза мои узнают сразу.

— А можешь ты посчитать?

— Если тебе нужно, посчитаю. Только долго буду считать. Поезжай пока в ярангу (жилище чукчей), а потом я принесу счёт.

В яранге мы успели попить чаю, закусить, переговорить с хозяином обо всём, а часа через два пришёл наш «Подсчётчик». Он назвал цифру — 128. Старик хозяин крайне удивился такому множеству оленей.

— Наверно ты ошибся. Так много оленей никогда у нас не было.

Старик решил проверить... Для этого он разулся и через три часа сообщил, что подсчёт произведён правильно (он помнил каждого оленя). Для подсчёта не хватило своей семьи из пяти человек, и пришлось пригласить ещё двух человек из соседней яранги» (Т. Сёмушкин, На Чукотке).

Некогда существовавшая двадцатеричная система у народов Франции оставила следы в современном французском языке, в котором названия числительных 80, 90 и т. д. звучат: quatre-vingts и quatre-vingts-dix: «четыре двадцатки» и «четыре двадцатки десять». Известный роман Виктора Гюго «93-й год» имеет заглавие «Quatre-vingts-treize» — «четыре двадцатки тринадцать».

В английском языке среди многих значений слова score (метка, зарубка, счёт очков в игре, счёт в ресторане, счастье, успех, партитура) имеется и числовое: score — двадцать, three score — три двадцатки — 60, four score — четыре двадцатки — 80 и т. д.

Следы двадцатеричной системы счисления обнаруживаются и у чукчей. «В каждом стаде оленей двадцать по двадцать, ещё раз и ещё раз двадцать по двадцать — тысяча двести голов — вот сколько оленей у старого Эчавто» (Т. Сёмушкин, Алитет уходит в горы).

Шестидесятеричная система счисления была в совершенстве разработана у жителей стран древней Вавилонии, в согласии с существовавшей у этого народа системой мер с единичными отношениями, равными 60, доле 60 или кратному 60. У вавилонян же существовали систематические дроби, вроде наших десятичных, с основанием 60. Для объяснения появления у них такой системы счисления существует целый ряд гипотез. Часть исследователей полагает, что у первоначального населения Вавилонии вначале была десятичная система счисления, которая позднее сочеталась с числом шесть, как удобным числом для единичного отношения мер, так как число 6 позволяет выражать целым числом меньших мер $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ большей меры. В результате слияния этих двух оснований получилась очень удобная шестидесятеричная система счисления, позволяющая выражать конечными систематическими дробями (шестидесятеричными) многие результаты деления чисел, как показано в примечании 58 в конце книги [8].

Делались попытки введения в Европе шестидесятеричного счисления, например в XIII в. весьма влиятельным ректором Парижского университета Петром Филоменом (датчанин, известный и под именем Petrus de Dacia) и в XV в. Иоганном Гмунденом, первым профессором Венского университета, читавшим лекции только по математике (до этого лекции математики поручались профессорам других наук). Обе попытки остались безрезультатными, так как к тому времени удобства индо-арабского десятичного счисления в области целых чисел достаточно хорошо сочетались на практике с аппаратом шестидесятеричных систематических дробей вавилонян. Появление десятичных дробей, уничтоживших разнобой между десятичным счислением целых чисел и шестидесятеричным счислением дробей, лишило дальнейшие попытки в этом направлении всякого смысла; шестидесятеричные доли удержались лишь в мерах времени и углов (минуты, секунды, терции).

Двенадцатеричная система счисления существовала некогда у разных народов, о чём свидетельствует употребляемый до сих пор на Западе счёт некоторых предметов, например перьев, карандашей, тарелок, предметов белья, дюжинами и гроссами (Gross — большой, «большая дюжина» — 144). Для теоретической арифметики двенадцатеричная система была бы удобна, так как основание системы делится на 2, 3, 4, 6, почему такую

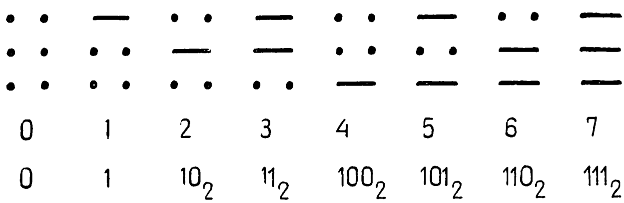


Рис. 3. Табличка записи чисел от 0 до 7 по двоичной системе. Дополнена в нижних строках нашими цифрами и записью в двоичной системе. Чёрточка означает 1, знак .. — нуль.

систему предлагали ввести неоднократно: французский естествоиспытатель Бюффон в конце XVIII в., философ Конт в начале XIX в. и др. Существует указание, приводимое Вольтером в его «Истории Карла XII», что в начале XVIII в. шведский король Карл XII, разбитый Петром I под Полтавой, намеревался ввести такую систему счисления законом. В Америке существует организация The Duodecimal Society of America — «Американское Двенадцатеричное общество» для разработки и пропаганды двенадцатеричной системы, особенно оживившая свою деятельность в наши дни [9].

Ещё пятьдесят лет назад французским математиком Кадена (Cadenat) была предложена более радикальная реформа нумерации в виде системы счисления с основанием 24 (biduodécimal) и буквами вместо цифр. Буквы алфавита по порядку их следования обозначали 23 первых числа натурального ряда, за исключением буквы *o*, которая должна была обозначать нуль. Получилась бы нумерация:

a	*в*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*x*	*z*	*o*
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0

Такая нумерация для вычислений имела бы преимущества перед десятичной. Вопрос о замене наших цифр буквами подымался не раз, в частности для усовершенствования пишущих машин,

Г. Г. Лейбниц.

в которых при такой реформе нумерации получалась бы возможность включения в клавиатуру машины других знаков. О новейших предложениях таких реформ, практически столь же безнадежных, как и старые, говорится в статье Н. В. Юшманова «Проблема алфавитного порядка» («Язык и мышление»». Сб. IX, 1940, Институт языка и мышления Академии наук СССР, стр. 73 и след.).

В 1937 г. появилась весьма обстоятельная диссертация этнографа Клуге, изучившего на месте системы счисления 976 племён Судана. Обнаружены племена, у которых двенадцатеричная система счисления разработана в законченном виде (племя мунга).

Говоря о теоретических преимуществах двенадцатеричной системы счисления, нужно отметить, что современный французский математик Дю-Паскье доказывает наибольшее удобство для теории чисел системы счисления с основанием $4 = 2^2$.

Двоичная система счисления, как самая простая, существовала, по-видимому, вначале у всех народов. Об этом свидетельствуют системы мер и названия их долей в языках многих народов, в том числе и русского народа. Так, например, от древнерусской меры земли «выть» шёл ряд меньших мер — полвыти, четверть выти (четь), полчетверти, полполчетверти, полполполчетверти и т. д., от полчетверти — осмина, полосмина, от четверика — полчетверик, полполчетверик, малый четверик, полмалыйчетверик.

Долго существовавший взгляд, согласно которому удвоение и медиация (раздвоение — деление на две равные части) представляют особые арифметические действия, базировался на воспоминаниях о некогда существовавшей двоичной системе счисления.

Двоичная система счисления существовала на востоке. Изобретение её относят к IV тысячелетию до нашей эры. При помощи чёрточек и пар точек в те времена записывали числа от 0 до 7 (см. рис. 3).

Смысл этой таблички указал Лейбниц (1646—1716), который рекомендовал миссионерам, сообщившим ему эту запись, использовать двоичную систему нумерации для... обращения китайцев в христианство: христианская религия, по которой человек — нуль, ничто рядом с богом — единицей, должна-де быть по душе китайцам, в системе счисления которых фигурировали только знаки для 0 и 1.

Лейбниц разработал двоичную арифметику и составил приводимый здесь рисунок, на котором изображены в двоичной системе числа от 0 до 17: правый столбец в обеих колонках даёт числа от 0 до 17 в десятичной системе, левый столбец — в двоичной.

Перед числами 2, 4, 8, 16 поставлены звёздочки: это единицы высших разрядов по двоичной системе. Верхняя латинская надпись: «2, 3, 4, 5 и так далее. Для получения их всех из нуля достаточно единицы». Нижняя надпись: «Картина создания. Изобрёл Г/отфрид/ Г/ильом/ Л/ейбниц/. MDC XCVII» (1697).

Электронные счётные машины. Вследствие теоретических удобств двоичной системы она широко используется при изложении теории множеств.

В настоящее время двоичная система счисления получила громадное практическое применение в электронных счётных машинах. Эти машины, работающие по двоичной системе, обладают колоссальной мощностью, производя до ста тысяч операций в секунду. Без таких машин в настоящее время немыслима не только теоретическая наука (современные физика и астрономия), но и прикладные дисциплины (артиллерия, метеорология и др.). Ещё в 1954 г. вычисления, необходимые для прогноза погоды на 48 часов вперёд и состоявшие из 2 700 000 операций, машина выполняла в 30 минут. В настоящее время быстрота работы ма-

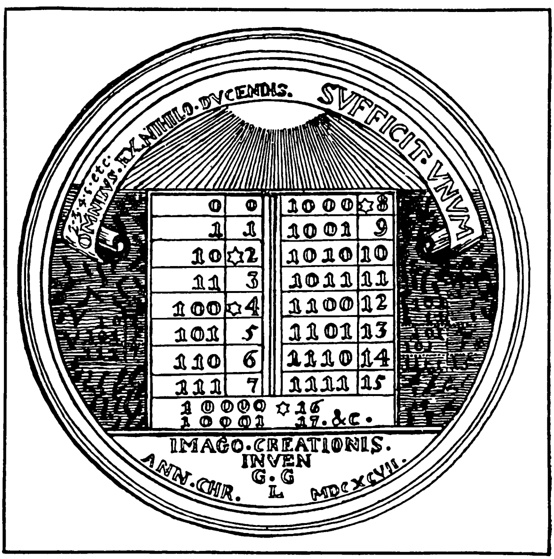


Рис 4.

Джордж Буль (Буул).

шин во много раз возросла, и без электронных счётных машин работа бюро погоды немыслима.

Отметим, что важную роль при создании электронных счётных машин и использовании для этого двоичной системы счисления играла особая арифметика и логика ирландского математика середины XIX в. Джорджа Буля (Буула) (1815—1864), одного из основоположников математической логики [1].

Усовершенствованием электронных счётных машин в настоящее время занимаются тысячи специальных институтов и исследователей как у нас, так и в зарубежных странах.

«Электронные счётные машины с одинаковым успехом обслуживают математиков и физиков, астрономов и геологов, химиков и физиологов и даже... помогают переводчикам... Они выполняют не только математические, но и логические операции. Открываются возможности с помощью этих машин переводить тексты с одного языка на другой (выбор любой), осуществлять управление полётами и посадками самолётов в масштабах целого аэропорта, автоматически обрабатывать на станках сложные детали, регулировать движение при помощи светофоров в целом районе и даже городе... Если известна физическая сущность процесса, то, как правило, он может быть описан математическими уравнениями, решение которых даёт полную картину явления. Большинство математических уравнений и задач может быть сведено к огромному количеству элементарных арифметических действий — сложению, вычитанию и т. д. Электронные счётные машины и используют этот принцип, т. е. решают задачи, выполняя элементарные действия...

Примером таких машин и является БЭСМ, производящая много тысяч операций над девятизначными числами за одну секунду; она заменяет труд десятков тысяч вычислителей... С помощью электронных машин можно решать научные и инженерно-технические проблемы, ранее решавшиеся упрощённо или даже считавшиеся неразрешимыми (В. Мельников и С. Поздняков, БЭСМ, 1957).

---

[1] Джордж Буль — отец писательницы Этель Войнич.

Один из первых творцов электронных счётных машин Норберт Винер (1894—1964) сказал, что скоро «математик средних способностей, по-видимому, не будет иметь предложить ничего, что стоило бы у него купить». Это преувеличение. Эти машины не являются «роботами», способными сознательно действовать и заменять человека. Они подчиняются во всех действиях программе, заданной человеком. Они не заменяют человека, а лишь облегчают его работу, выполняя многие утомительные и трудоёмкие операции, повышают этим производительность труда человека, в чём их огромное значение.

Двоичная система счисления, долгое время считавшаяся давно пройденным этапом развития арифметической культуры человечества, возродилась вновь и стала орудием прогресса в счётной машине.

В современном техническом языке в связи с употреблением в электронных счётных машинах двоичного исчисления появилось новое слово: bid (бид). Оно обозначает цифру двоичной нумерации и получилось от сочетания первых букв слов: binary digit — бинарная (двоичная) цифра.

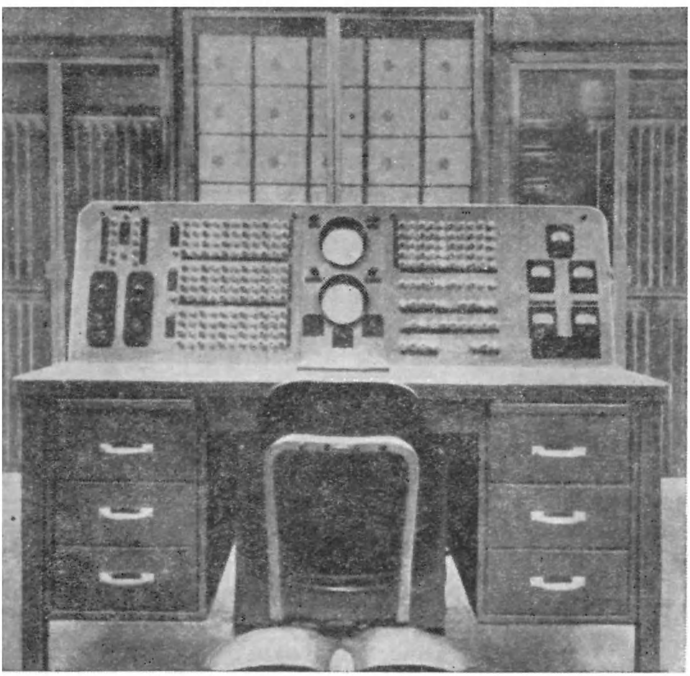


Рис. 5. Одна из первых электронных счётных машин.

7. ЗАДАЧА БАШЕ — МЕНДЕЛЕЕВА

Чтобы показать, как недесятичные системы счисления могут быть использованы на уроках арифметики, рассмотрим задачу, к решению которой в течение многих веков возвращались отдельные математики.

Леонардо Пизанский (XIII в.), Лука Пачоли (XV в.) и др. рассматривали задачу о наилучшей системе гирь. Этой задачей интересовался Д. И. Менделеев в бытность директором Главной палаты мер и весов. Задача эта решается легко при помощи систем счисления с основанием 2 и 3. Ставились следующие вопросы:

При какой системе гирь, имея их по одной, можно взвесить всевозможные грузы до некоторого наибольшего груза, кладя гири только на одну чашу весов? Подразумеваются грузы в целое число основной единицы (грамма).

Очевидно, что наибольший груз, который может быть взвешен некоторой данной системой гирь, обладает весом, равным сумме весов всех имеющихся гирь. Необходимо гири подобрать так, чтобы из них можно было составить вес, не превосходящий предельного веса. Вопрос этот, очевидно, равносилен вопросу о составлении всякого числа, не превосходящего n, из некоторого набора меньших чисел.

Пусть имеется по одной гире (или монете) в 1, 2, 3, 5, 10, 20 единиц. Ими можно взвесить наибольший груз в 41 единицу. Все веса до 41 единицы можно составить из имеющихся эталонов, в чём можно убедиться непосредственной проверкой. Для больших чисел такая проверка представляет трудности, так как для разбиения числа на слагаемые всеми возможными способами не существует никаких методов. Этот пробел в математике отмечал в своё время немецкий математик Кронекер (1823—1891).

Возникает вопрос, нельзя ли выбрать другую систему из 6 гирь, которая позволила бы взвесить груз больший, чем в 41 единицу, и для которой можно было бы доказать, что все меньшие грузы составляются из гирь выбранной системы. Ответ на этот вопрос даёт двоичная система счисления.

В любой системе счисления с основанием r всякое число N представляется в виде:

$$N = a_n \cdot r^{n-1} + a_{n-1} \cdot r^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot r + a_1,$$

где $a_1, a_2, \ldots a_n$ — цифры, стоящие на первом, втором, ...n-м месте, считая справа.

В двоичной системе ($r = 2$) всякое числое N представляется в виде:

$$N = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 2 + a_1.$$

В двоичной системе цифрами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть только 0 и 1. Таким образом, если число N десятичной системы нужно выразить в двоичной системе, то его нужно представить в виде суммы степеней двойки.

Выражение всякого числа десятичной системы в двоичной системе выполняется делением данного числа и получающихся частных на 2. В целях упражнения учащихся в устном производстве действий и экономии места операцию перевода удобно производить следующим образом.

Пусть надо число 743 (десятичной системы) выразить в двоичной системе. Заполняем таблицу, начиная справа, деля в уме 743 и полученные частные на 2.

	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	№ деления
0	1	2	5	11	23	46	92	185	371	743	Делимое и частные в десятичной системе
	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	Остатки от деления, они же и цифры числа в двоичной системе (высший разряд слева)
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	№ разряда (места слева в двоичной системе)

Результат: $743_{10} = 1\ 011\ 100\ 111_2$.

Так как всякое число десятичной системы можно представить в двоичной системе, то, выбрав систему гирь, соответствующую разрядным единицам двоичной системы, т. е. 1, 2, 4, 8, 16, 32, мы можем все грузы до $(1+2+4+8+16+32)$ 63 единиц представить в виде сумм из гирь, взятых по одной. Такая система гирь удобнее системы, 1, 2, 3, 5, 10, 20, так как даёт возможность взвешивать шестью гирями грузы до 63 единиц вместо 41 единицы; никакой проверки возможности составления всех грузов до 63 единиц не требуется, а необходимый набор гирь определяется обращением числа в двоичную систему. Пример:

$$57_{10} = 111001_2; \quad 57 = 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 32.$$

Норберт Винер.

Представление числа 57 в двоичной системе показывает, что для составления 57 граммов из гирь в двоичной системе нужно взять разрядные группы I, IV, V и VI, т. е. $57=1+8+16+32$.

Какая система гирь будет самой удобной, если иметь один набор гирь, но класть их на обе чаши весов?

Положить гирю на левую чашу весов — значит вычесть её вес из веса гирь, находящихся на правой чаше.

Число, написанное в троичной системе, представляется в виде:

$$N = a_n\cdot 3^{n-1} + a_{n-1}\cdot 3^{n-2} + \\ + \ldots + a_2\cdot 3 + a_1,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — цифры этого числа, считая справа; они могут быть лишь 0, 1, 2. Имея на каком-нибудь месте такого числа цифру 2, мы можем к ней прибавить и вычесть 1 и получить одну единицу высшего разряда и отрицательную единицу прежнего разряда. Так, например,

$$12\,021_3 = 12\,1\bar{1}1_3 = 2\bar{1}1\bar{1}1_3 = 1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}1_3.$$

Возможность представления всякого числа в троичной системе при помощи цифр 1 и 0, если ввести употребление отрицательных разрядных цифр, доказывает, что всякий груз в пределах суммы весов основных гирь может быть взвешен при помощи одного набора гирь, составленного из разрядных групп троичной системы: 1, 3, 9, 27, 81, 243.

Такая система из 6 гирь даёт возможность взвесить все грузы до $1+3+9+27+81+243=364$ (единиц). Пример:

$$107_{10} = 10\,222_3 = 11\,00\bar{1}_3,$$
$$107 = -1 + 0\cdot 3 + 0\cdot 9 + 1\cdot 27 + 1\cdot 81,$$

т. е. для взвешивания груза в 107 единиц нужно положить на правую чашу гири 81 *г* и 27 *г*, на левую 1 *г*[1].

[1] Более подробно вопрос о переводе чисел десятичной системы в двоичную и троичную системы и соответствующий ему вопрос о гирях изложены в книгах автора «Возникновение системы мер и способов измерения величин», вып. 1, Учпедгиз, 1956, и «Меры и метрическая система», Учпедгиз, 1955. Там же рассказано о применении троичной системы гирь в русской практике.

Рассмотренные решения задачи о гирях, сводящиеся к представлению чисел десятичной системы в двоичной или троичной (что всегда возможно единственным образом), доказывают такие теоремы:

1) всякое натуральное число можно представить в виде суммы степеней 2;

2) всякое натуральное число можно представить в виде сумм и разностей степеней 3.

К. Г. Баше.

В том и другом случае в указанное представление может входить и единица, рассматриваемая как нулевая степень любого числа, и каждая степень берётся лишь один раз. Эти теоремы впервые сформулировал петербургский академик Леонард Эйлер (1707—1783).

Задачу о гирях называют задачей Баше по имени французского математика Клода Баше (1587—1638), издавшего в 1612 г. известный «Сборник занимательных задач», переведённый на многие языки.

Русский перевод книги К. Г. Баше «Игры и задачи, основанные на математике» вышел в Петербурге в 1877 г. Задачу о гирях Баше решает только для частного случая и не применяет свойств троичной системы счисления (см. стр. 151 русского издания). Задачу Баше — Менделеева решали неоднократно без применения свойств систем счисления, и тогда решение её занимает десятки страниц. На русском языке имеется на эту тему несколько брошюр: Е. С. Давыдов, Наименьшие группы чисел для образования натуральных рядов, Спб., 1903, 36 стр.; В. Ф. Гартц, Лучшая система для весовых гирь, Спб., 1910, 36 стр. Оба автора при доказательстве пользуются алгеброй (биномом Ньютона). Появлялись статьи на эту тему и в серьёзных математических журналах, из которых отметим: проф. Ф. А. Слудский, О свойствах степеней двух и трёх. «Математический сборник», ч. III, стр. 214.

8. ПРОИСХОЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НАЗВАНИЙ ЧИСЕЛ

Попыткам филологического объяснения названий чисел для некоторых групп родственных языков, например так называемых индоевропейских, посвящено много исследований, но без каких-либо общепризнанных результатов.

Грамматический состав русских числительных «одиннадцать»—один на десять, «двадцать»—два десять, «тридцать»—три десять, «полтора» — пол втора (второго десятка), «полтретья» — пол третьего для $2^1/_2$ — понятны без объяснения. Схожи с приведёнными не употребляемые в современной речи формы «полтретьядцать» — для 25 («Житие Аввакума») и «пол четвертаста без единого» — для 349 ($100+100+100+{}^1/_2\cdot100-1$, у Кирика Новгородского в XII в.). Отметим лишь этимологию двух числительных: «сорок» и «девяносто».

Слово «сорок» иногда производят от древнегреческого «сара́конта». Другие филологи — слависты (датчанин Педерсен) производили «сорок» от древнесеверогерманского корня serkr, для которого эти языковеды допускают славянское происхождение. Сближение корня «сорок» с греческим, т. е. «сараконта», совершенно отвергается нынешними филологами: некоторое созвучие с первой частью греческого названия является случайным; кроме того, и различие ударений говорит против указанного допущения.

Вместе с тем совершенно непонятно, почему славяне, создав все остальные имена числительные для называния полных десятков по одному принципу средствами собственного языка, для числа 40 приняли греческое название. Притом это могло произойти в эпоху до принятия христианства, а тогда сношения с греками были редки.

О влиянии греческого языка на народный русский язык того времени не может быть никакой речи, тем более что некоторая особая роль, которую играет число сорок в русских народных преданиях, как мы видели, имеет происхождение восточное, а не греческое. Корень слова «сорок» или «сорочо́к» тот же, что в слове «сорочка» (рубаха). На полную шубу шло 40 штук соболей. Известно, что собольи шкуры играли роль единицы ценности. Сорок или сорочо́к соболей составлял «полную шубу» и служил также единицей ценности.

Слово «сорок», отделившись от прежнего своего предметного значения, стало абстрактной характеристикой всех множеств, равночисленных с множеством 40 шкур. Аналогий таких переносов терминов конкретного счёта в абстрактный можно указать много: римская унция была первоначально мерой веса, равной $\frac{1}{12}$ высшей меры, впоследствии унция стала названием дроби $\frac{1}{12}$, говорили «одна унция часа» и т. д.; датское слово ol — название числа 80 — означает шест или жердь: на жердь надевали 80 рыб, а позднее название жерди стало обозначением числа 80 вообще; таким же образом словацкое meru (40) произошло от венгерского mero — названия меры зерна, состоявшей из 40 более мелких мер (Булаховский, Исторический комментарий к литературному русскому языку).

Приведённые объяснения происхождения числительного «сорок» подтверждаются рядом свидетельств.

В XII в. по уставу новгородских князей доход с жителей нынешних Вологодской и Архангельской областей определялся «сорочками» беличьих шкурок, которые позднее, при развитии промысла, стали считать уже тысячами. В торговых грамотах XVI в. является обычным счёт сорока́ми звериных шкур при продаже или при мене на другие товары. Имеются данные о том, что и в XVII в. «сорочка́ми» считали собольи хвосты.

Относительно счёта сорока́ми существует предположение, что этот счёт происходит от счёта по суставам пальцев. Сибирские звероловы до нашего века считали большим пальцем по двум суставам остальных четырёх пальцев (включение третьего сустава в этот процесс счёта является менее удобным) правой руки. Насчитав на правой руке восемь единиц, счётчик загибал палец левой руки. Эта операция счёта кончалась, когда оказывались загнутыми все пять пальцев левой руки. Пять восьмёрок, или сорок, составляли таким образом счётную группу.

Рис. 6. Происхождение счёта сорока́ми; счёт по суставам пальцев.

Для русского числительного «девяносто», встречающегося в памятниках, начиная с XIV в., существует такое объяснение. Девяносто — это число «девять до ста». Звук *н* появился как облегчающий произношение сочетания зубных звуков *тьд*. Указывается на аналогичное явление в греческих и латинских названиях числа 90. Название числа 100 получило большое значение в языкознании.

Филологи выделяют семейство индоевропейских языков, охватывающее языки многих народов Европы и Азии. У всех западных народов этого семейства название числа 100 начинается со звука *к* и в той или иной степени походит на древнелатинское ке́нтум (centum), которое ранее читали как центум, откуда наименования центнер, процент, центурион (сотник римских войск) и ряд других. У народов восточной группы название числа 100 звучит сходно с индийским словом са́там, означающим также сто. Сюда относятся русское сто, финское sata, эстонское sada. Языковеды так и называли западные и восточные индоевропейские языки языками «группы кентум» и «группы сатам». Деление это долгое время считалось в языкознании абсолютно бесспорным.

В XX в. были найдены рукописи, написанные на неизвестном ранее тохарском языке. Когда их прочли, то оказалось, что этот язык относится к индоевропейским, но принадлежит к типичным языкам кентум, т. е. к западным, хотя тохарский народ обитал на крайнем востоке Азии. Это открытие заставило представителей языкознания пересмотреть свои позиции (Л. Успенский, Слово о словах. Очерки о языке, 1957).

9. БОЛЬШИЕ ЧИСЛА И ИХ НАИМЕНОВАНИЯ

Архимед показывает в своем сочинении «Псаммит» (исчисление песчинок), что числовой ряд можно продолжать неограниченно. Он считает (и пишет) при помощи имевшихся в его время у греков в употреблении цифровых знаков числа до мириады мириад ($10\,000 \cdot 10\,000 = 10^8$), не включая последнего числа. Эти числа он называет первыми. Беря за новую счётную единицу мириаду мириад (10^8), или октаду, он, повторяя счёт первой октады 10^8 раз, доходит до числа $10^8 \cdot 10^8 = 10^{2\cdot 8}$. Эти числа он называет вторыми.

Повторяя этот процесс мириаду мириад (10^8) раз, Архимед приходит к мириадно мириадным числам, заканчивающимися числом $10^{10^8 \cdot 8}$, равным $10^{800\,000\,000}$. Все числа натурального ряда до этого числа он называет числами первого периода.

Беря число $10^{10^8 \cdot 8}$ за счётную единицу, Архимед повторяет с ним процесс образования чисел первого периода 2, 3, 4,..., $\cdot\, 10^8$ раз, доходя последовательно до чисел $10^{2 \cdot 10^8 \cdot 8}$, $10^{3 \cdot 10^8 \cdot 8}$, $10^{4 \cdot 10^8 \cdot 8}$, ..., $10^{10^8 \cdot 10^8 \cdot 8}$; последнее число равно $10^{10^{16} \cdot 8} = 10^{80\,000\,000\,000\,000\,000}$.

Этим числом кончаются числа мириадно мириадного периода. Беря далее это число за счётную единицу, можно продолжить числовой ряд как угодно далеко. По вычислениям Архимеда, число песчинок, заполняющих всё мировое пространство по тогдашним представлениям, не более 10^{63} или $10^{7 \cdot 8+7}$, т. е. принадлежит к восьмым числам первого периода. Для исчисления песчинок, заполняющих мировое пространство, достаточно ничтожно малой части чисел его системы.

Из книги греческого математика Паппа (III—IV в. н. э.) известно, что Аполлоний Пергский, который жил между 250 и 200 г. до н. э., рассматривал такое же счисление, где счётной группой являлась не октада (10^8), а тетрада (10^4).

«Псаммит» Архимеда, помимо решения вопроса о неограниченности числового ряда, интересен в истории математики ещё тем, что здесь рассмотрение чисел сводится к рассмотрению показателей степеней десяти, т. е. здесь появляется идея логарифма. Ещё до написания «Псаммита» Архимед устанавливает правило, которое соответствует нашему равенству:

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n},$$

только, к сожалению, с некоторым усложнением в обозначениях, оказавшим задерживающее влияние на развитие математики. Об этом идёт речь в истории логарифмов.

Разные народы давали специальные названия различным степеням десяти: народы Индии имели такие названия для всех степеней до 10^{53}.

Все эти громадные числа не имели реального значения в практике. Народная масса с трудом осваивала понятия и названия больших чисел. Сваха в пьесе Островского признаётся: «...для меня всё, что больше тысячи,— мильон». Только астрономические и физические теории наших дней приводят к числам указанных порядков [10].

У славян не поддающееся счёту множество объектов обозначалось словами **тьма** или **несведь. Тьма** означала на раннем этапе развития тысячу, затем десять тысяч. Этого отрезка натурального ряда было достаточно для житейских расчётов. Но «коли прилучался великий счёт и перечень», требовались числа, выходящие за эти пределы, и употреблялось «великое словенское число», то счёт доходил до 10^{48} и 10^{49}. В этом великом счёте **тьма** означает уже тысячу тысяч, появляются высшие счётные единицы с особыми названиями: **легеон′** — тьма тём, миллион миллионов (10^{12}), **леодр** — легеон легеонов (10^{24}), **ворон** — леодр леодров (10^{48}), **«И больше сего числа несть человеку разумевати»,** — говорит автор славянской рукописи. Встречается (в XVII в.) ещё термин **«колода»** — десять воронов, и вновь автор рукописи замечает: **«сего числа несть больше».**

Л. Магницкий в своей «Арифметике» 1703 г.— в этом замечательном памятнике нашей учебной математической литературы («вратами своей мудрости» назвал эту книгу и «Грамматику» Смотрицкого М. В. Ломоносов), дав названия разрядов чисел до квадрильона (10^{24}), говорит:

Число есть бесконечно...
...есть бездельно
Множайших числ искати
И боле сей писати
Превосходной таблицы,
Умов наших границы.
И еще кому треба
Счисляти что внутрь неба,
Довлеет числа сего
К вещем всем мира всего.

* * *

Остановимся на истории возникновения ныне употребляемых названий больших чисел.

Термин «миллион» итальянского происхождения и встречается уже в первой печатной арифметике (анонимной), вышедшей в итальянском городе Тревизо в 1478 г. (о ней будет речь особо), и ещё ранее в нематематической книге путешественника Марко Поло (умер в 1324 г.), а в форме «миллио» — уже в рукописи 1250 г. [11].

В рукописи французского математика Шюке (умер около 1500 г.), напечатанной в 1880 г., впервые появляются термины «биллион» — 10^{12}, «триллион» — 10^{18} и дальнейшие; в печатном руководстве биллион в значении 10^{12} появляется в 1602 г., в то время как Америка до конца XVIII в., а Франция до сих пор называют биллионом 10^9.

Слово «миллиард», имевшее вначале значение 10^{12}, получило в «Арифметике» Траншана (1558) его теперешнее значение 10^9 (тысячи миллионов) и употреблялось во Франции в XIX в. наравне со словом «биллион». В Германии это слово вошло в употребление лишь после получения от Франции 5 миллиардов контрибуции после войны 1871 г.

В настоящее время не существует ещё единой системы названий для больших чисел.

В Америке и Франции принято называть:

1000	миллионов—биллион, или миллиард,	— 10^9
1000	биллионов — триллион	— 10^{12}
1000	триллионов — квадриллион	— 10^{15}
1000	квадриллионов — квинтиллион	— 10^{18}

В Англии и Германии:

1 000 000	миллионов — биллион	— 10^{12}
1 000 000	биллионов — триллион	— 10^{18}
1 000 000	триллионов—квадриллион	— 10^{24}
1 000 000	квадриллионов—квинтиллион	— 10^{30}

Под термином «миллиард» и в Англии также понимают 10^9 (см. Джинс, Движение миров, 1937). В книге Джинса читатель найдёт иллюстрации, что означают эти числа реально. Например, книга в миллион страниц имеет толщину в 32 *м*, а пачка в миллиард рублёвок — 135 *км*.

Приведём ещё иллюстрации для больших чисел. Большегрузный железнодорожный вагон может вместить 50 миллионов рублей, десятирублёвыми билетами. Для перевозки триллиона рублей понадобилось бы 20 тысяч вагонов («Ленинградская правда» от 22 мая 1957 г.).

Для чтения многозначных чисел анонимная рукопись 1200 г. впервые рекомендует разбить цифры на группы по 3 или отмечать группы точками вверху или дугами; это же затем рекомендует Леонардо Пизанский (1228). К этой системе приходят и последующие авторы.

Термин «десятичное место» в числе находит применение в руководствах Вольфа (1716) и Кестнера (1758). Обе эти книги переведены на русский язык в XVIII в.

10. ПИСЬМЕННАЯ НУМЕРАЦИЯ

После того как в языке народа установился способ называть числа, возникают поиски и создаётся система письменного изображения этих чисел.

Очевиден идеал, к которому стремились все попытки решения проблемы письменной нумерации. Немецкий математик Г. Ганкель (1839—1873) сформулировал его так: «Идеальная цифровая система должна с помощью возможно малого числа знаков представлять каждое число в наиболее сжатом и в наиболее наглядном виде». Это требование практики часто называют «постулатом Ганкеля».

Герман Ганкель.

Системы цифр у разных народов на разных ступенях культурного развития были различны, начиная от зарубок на деревянных палочках и кончая нашей позиционной системой с символом для нуля, в которой идеал Ганкеля осуществлён полностью. Но до этого идеала человечество дошло путём долгой эволюции, пользуясь гораздо более примитивными способами записи чисел.

По-видимому, все народы вначале обозначали числа зарубками на палочках, которые у русских назывались бирками. Такой способ записей долговых обязательств или налогов применялся малограмотным населением разных стран. На палочке делали нарезы, соответствующие сумме долга или налога. Палочку раскалывали пополам, одну половину оставляли у должника или у плательщика, другую хранил заимодавец или казначейство. При расплате обе половинки проверяли складыванием. В Англии этот способ записей налогов существовал до сравнительно недавнего времени [1].

Описание записи долга или ведения счёта при помощи бирок мы находим у разных авторов прошлого и настоящего. Так, например, у Гоголя («Пропавшая грамота») «шинкарь нарезы-

---

[1] При ликвидации старых налоговых обязательств крестьян в Англии было решено сжечь накопившиеся бирки в печах здания парламента. От этого произошёл пожар и сгорело само здание парламента (1834), а вместе с ним погиб и вделанный в стену образец английской меры длины, так что с тех пор англичане не знают точной длины своего фута. В продолжительной работе по восстановлению длины погибшего фута принимал участие ближайший помощник Д. И. Менделеева по упорядочению мер — проф. Ф. И. Блумбах. Англичане соблазняли Блумбаха остаться на работе в Англии. Из рассказа самого Блумбаха, умершего в 1949 г. в звании почётного члена Академии наук Латвийской ССР, известно, что по поводу его отказа от предложения англичан Д. И. Менделеев с удовлетворением заметил: «Ты был и остался русским латышом, а если бы принял предложение англичан, то был бы... (последовало очень крепкое слово). История пожара здания английского парламента описана великим писателем Ч. Диккенсом [12].

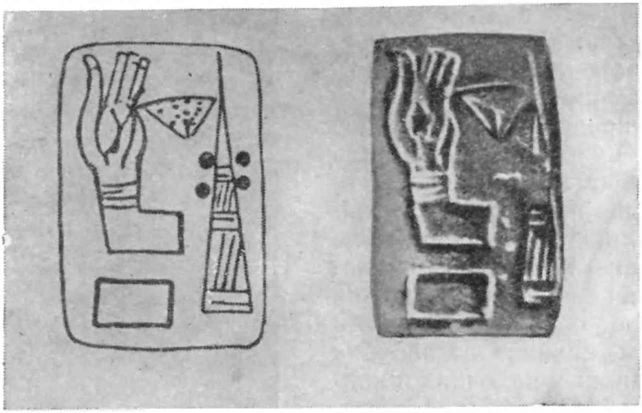


Рис. 7. Каменная таблетка с древнейшим шумерским пиктографическим письмом:
справа — фотоснимок таблетки, слева — её схематическое изображение.

вает рубцами на палочке, сколько кварт и осьмух высушили чумацкие головы». В упомянутой уже повести Г. Гора описывается кулак-нивх (гиляк):

«Давая в долг, Низюн торжественно доставал длинную тонкую палку, аккуратно обструганную, и ножом делал несколько зарубок при должнике, — не мог же он полагаться только на одну память. Но случалось и так, что когда должник приходил к Низюну отдавать долг, зарубок оказывалось почему-то больше, чем их было раньше... Но вот наступил день (прихода Советской власти), когда Низюну пришлось сжечь свои палки с зарубками» («Юноша с далёкой реки», стр. 25).

Деревянные счётные бирки — эти своеобразные бухгалтерские документы старого времени — в большом количестве найдены при московских раскопках («Археологические памятники Москвы и Подмосковья», Госкультпросветиздат, 1954, стр. 66).

О своеобразном способе использования идеи бирок рассказывает известный русский путешественник по Центральной Азии П. К. Козлов (1863—1935), действительный член Академии наук Украинской ССР. Он, стремясь попасть в заветный для европейских путешественников тибетский город Лхасу, сумел получить от далай-ламы в 1925 г. пропуск в виде шёлковой карточки, на одном краю которой были неправильной формы зубчики. Вторая половина карточки с соответствующими зубчиками находилась у горной стражи, охранявшей подступы к столице Тибета. При предъявлении пришельцем пропуска стража, путем сопоставления пилообразных краёв двух половин карточки, устанавливала подлинность разрешения на въезд в запретную зону. Этот вид пропуска представляет осуществление мысли, которая лежала в прежнее время в основе употребления деревянных палочек-бирок [1].

Разные народы древности пользовались цифровыми системами, построенными на различных принципах.

Лишь один принцип при начертании чисел применялся почти всеми народами: это отмеченный Ганкелем «закон убывающего следования разрядов». Он заключается в том, что при написании чисел, составленных с помощью сложения разрядов (аддитивно), высший разряд при принятом данным народом способе чтения и письма предшествует на письме низшим разрядам. При этом надо иметь в виду, что направление письма и чтения у разных народов было различное: семитические народы и греки в древнейший период писали справа налево, другие народы —слева направо, третьи — по вертикальным столбцам. Существовал и способ письма попеременно в двух противоположных направлениях, который (вследствие аналогии с движением вола при пахоте) получил название **бустрофедон** (от греческого «на манер бычачьих поворотов»). Так, например, написаны законы греческого мудреца Солона, относящиеся к VI в. до н. э.; встречается такой способ письма и в рунах народов северной Европы.

При любом способе письма числовые знаки следовали в случае аддитивного состава чисел из разрядов так, что в порядке чтения больший разряд предшествовал меньшим.

11. ВАВИЛОНСКИЕ ЦИФРЫ

Вавилонская культура развивалась в течение нескольких тысячелетий до нашей эры. Дошедшие до нас древнейшие памятники вавилонской письменности относятся к середине IV тысячелетия до нашей эры. Вавилонская культура достигла наивысшего расцвета в III и II тысячелетиях до нашей эры. Образовалась вавилонская культура в результате слияния нескольких исторически самостоятельных культур, поэтому у населения древнего Вавилона могли появиться разные системы письма чисел.

До 2200 г. до н. э. в Междуречье (область между реками Евфратом и Тигром) [2] процветала высокая культура народа, называвшегося шумерами. Позднее шумеры лишились политического господства, однако продолжали оказывать сильнейшее культурное влияние на победителей семитов. У шумеров была, по-видимому, сначала десятичная система счисления. Числовые знаки наносились на глиняные кирпичики круглым штифтом, который при вдавливании в перпендикулярном к таблетке направлении давал круг, при косом направлении штифта — полу-

---

[1] Описание путешествия П. К. Козлова в Лхасу, которое вследствие козней англичан не могло быть доведено до конца, можно найти в книге: Н. А. Северин, Отечественные путешественники и исследователи, Учпедгиз, 1955 (описание пропуска-бирки на стр. 221).

[2] Теперешний Ирак.

Рис. 8. Вавилонские криволинейные цифры.
(Снимок с глиняной таблетки эпохи около 2500 г. до н. э.)

круг или луночку. Позднее вошли в употребление штифты с клиновидным сечением, которые оставляли в глине клинообразные знаки. Глиняные таблетки высушивались на палящем солнце и превращались в прочные кирпичики, которые сохранились в громадном количестве до наших дней, пролежав в земле до 5000 лет. Первая обильная находка их имела место в теперешнем городе Сенкере (старовавилонский город Ларса в южном Междуречье, в конце III тысячелетия столица Вавилонии). Англичанин Лофтус в 1854 г. раскопал здесь очень богатые памятники вавилонской культуры.

Раскопки за последние десятилетия дали до сотни тысяч клинописных таблеток, среди них многие математического содержания. В результате мы имеем в настоящее время довольно полную картину состояния математических знаний обитателей древнего Вавилона. В разных местах книги воспроизводятся отдельные детали этой картины, общий же обзор достижений вавилонской математики читатель найдёт в книге: О. Нейгебауэр, Лекции по истории античных математических наук, 1937, в статьях проф. М. Я. Выгодского «Успехи математических наук», вып. VII и VIII, и проф. И. Н. Веселовского «Труды Института истории естествознания и техники», АН СССР, т. V, 1955. Здесь рассмотрим кратко только развитие вавилонской письменной нумерации.

В более древнем способе письма чисел луночка изображала единицу, круг — число десять. Уже более чем 5000 лет назад эти криволинейные числовые знаки употреблялись наряду с клинообразными для изображения некоторых особых чисел, подобно тому как мы теперь употребляем наряду с индийскими цифрами римские.

Клинообразные числовые знаки были: один клин для единицы и соединённые под углом два клина для десяти. Все остальные числа в обеих системах письма составлялись из двух основных знаков повторением их, как показано на прилагаемых рисунках.

В клинообразной системе нумерации был осуществлён позиционный принцип по шестидесятеричной системе счисления, но с весьма нечётким (для нас) отделением одного разряда от другого. Лишь в V в. до н. э. появляется особый знак для обозначения отсутствующего разряда внутри числа, но этот знак, предшественник нашего нуля, не получил широкого распространения. Существовал особый знак для обозначения вычитания; числа 19, 29 и т. д. писались в форме, которая соответствует принятому в наше время изображению 20—1, 30—1 и т. д. До нас дошли многочисленные таблицы умножения, таблицы квадратов и кубов чисел натурального ряда, таблицы для процентных вычислений, для обращения долей в систематические дроби с основанием 60 и др.

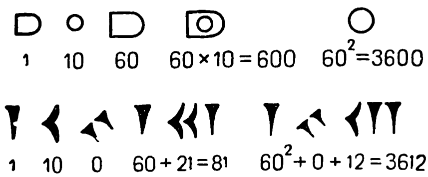


Рис. 9. Нумерация вавилонян: верхняя строка — древние шумерские цифры, нижняя — позднейшие вавилонские.

12. ЕГИПЕТСКИЕ ЦИФРЫ

Египетская культура развивалась в общем одновременно с вавилонской, но продолжала существовать до более позднего периода. Древнейшие числовые записи египтян, дошедшие до нас, относятся к эпохе около 3300 г. до н. э. и сообщают о взятии одним из царей Египта 120 000 пленных, а в качестве добычи 400 000 голов скота и 1422 000 коз. Эти числа, вероятно, преувеличены в целях большего прославления царя (фараона). Такие числа были изображены, как видно из прилагаемого снимка, при помощи египетской нумерации на стене гробницы одного из царей Египта.

Основными источниками сведений по египетской математике являются конспект египетского писца Ахмеса (XVIII—XVII вв. до н. э.), называемый, по имени приобревшего его в середине прошлого века английского собирателя, папирусом Райнда, или Ринда, и Московский папирус, который относится к эпохе, лет на 200 более ранней, и приобретён в Египте в конце прошлого века русским востоковедом В. С. Голенищевым.

Египтяне имели десятичную систему счисления. Письмо их, в том числе и начертание цифр, прошло три стадии. Самым ранним способом письма у египтян, как и у многих народов, было картинное (**пиктографическое**) и упрощенное картинное (**иероглифическое**): зарисовывались предметы, о которых шла речь. Позднее эти способы письма подверглись изменениям: вместо того чтобы на рисунке показать трёх львов, достаточно было нарисовать голову одного льва и под ней сделать три чёрточки.

Рис. 10. Часть египетского папируса Ахмеса (Райнда).

Эта идея была использована при записи чисел. Имелись особые знаки для единицы и степени десяти, которые для остальных чисел повторялись или снабжались чёрточками под ними, указывающими, сколько раз знак должен быть повторен.

Дальнейшее развитие хозяйственной жизни потребовало более быстрого способа письма. Возникает так называемое **иератическое** (жреческое) письмо, в котором картинки (иероглифы) за-

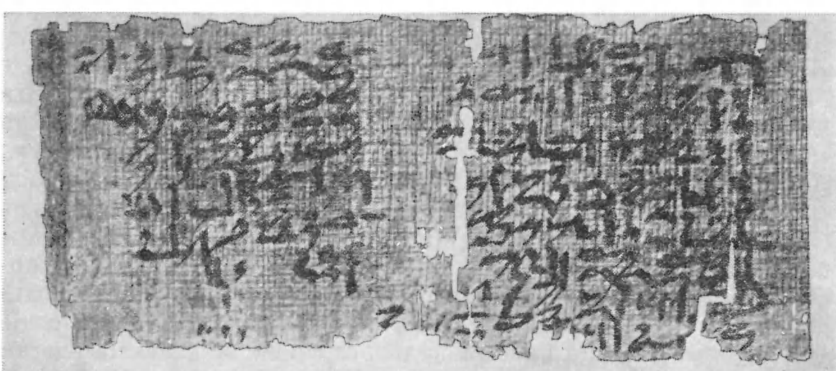


Рис. 11. Часть Московского папируса.

меняются условными знаками. Числа от 1 до 9, ранее изображавшиеся повторением одного знака, приобретают индивидуальные цифровые знаки, что является принципиальным отличием их от иероглифических цифр, значительно облегчающим расчёты. Знака, играющего роль нашего нуля, египетская нумерация не требовала, так как в ней отсутствовал позиционный принцип. Как писали египтяне числа в той и другой системе, видно из приложенных иллюстраций.

Позднее возникли ещё более упрощённые, так называемые **демотические** письмо и нумерация («демос» по-гречески — народ).

Все дошедшие до нас египетские математические документы написаны иератическим письмом. Чтение их оказывается более трудным, чем чтение иероглифического письма, почему египтологи обычно переводят иератическое письмо сначала в иероглифическую форму. Таким путём академик Б. А. Тураев расшифровал в 1917 г. первые задачи Московского папируса. Наши цифры являются также иероглифами, так как каждая из них является картиной, понятной для читателя любой национальности.

Папирус Райнда, хранящийся в Британском музее в Лондоне, переводился полностью на разные языки. Характерно для оценки автором значения математики заглавие папируса: «Наставление, как достигнуть знания всех тёмных вещей... (вырван кусок папируса) ... всех тайн, которые скрывают в себе вещи. Сочинение это написано в 33-м году и 4-м месяце времени вод в царствование фараона Ра-А-Ус со старых рукописей времён фараона... (оторван кусок папируса)... ат. Писец Ахмес написал это». На русском языке этот документ был изложен в диссертации В. В. Бобынина «Математика древних египтян по папирусу Ринда» (М., 1880). В журнале министерства народного просвещения (1908) В. В. Бобыниным было помещено согласованное с данными но-

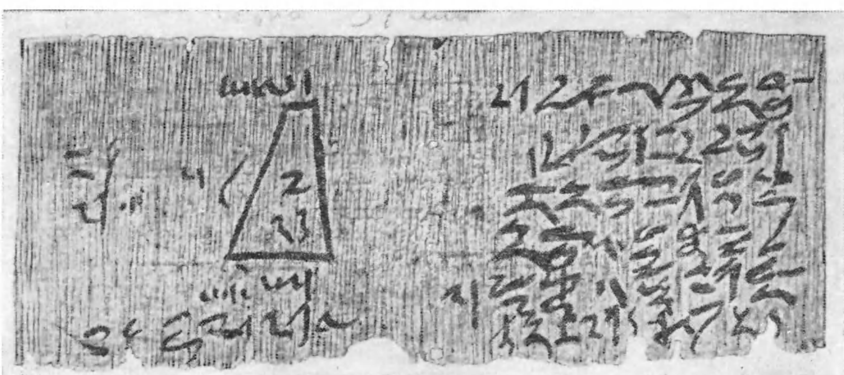


Рис. 12. Геометрическая задача Московского папируса.

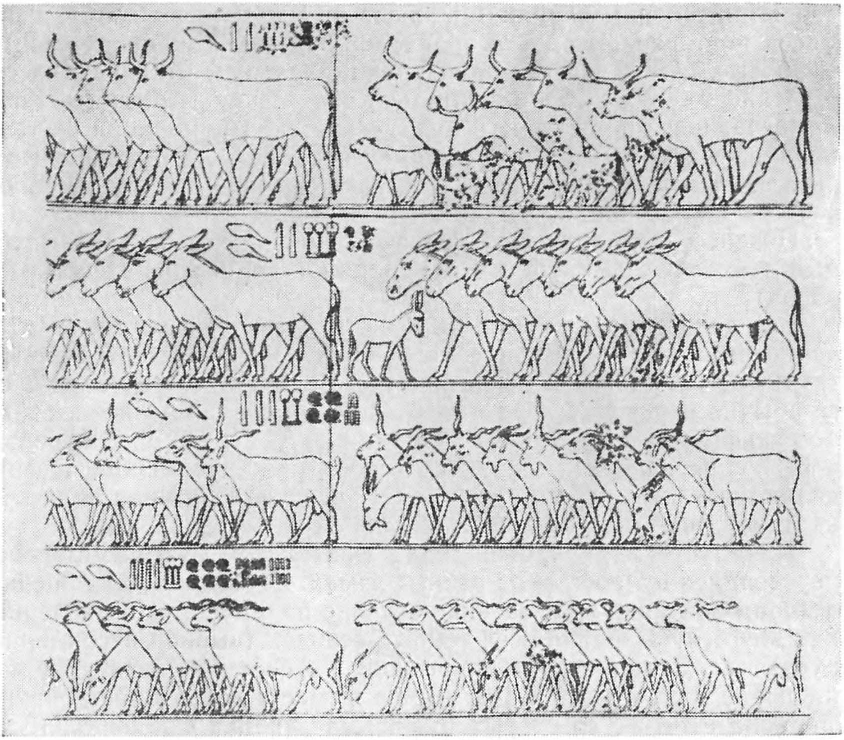


Рис. 13. Иероглифические числовые знаки египтян.
Фотоснимок с надписи в могиле фараона.

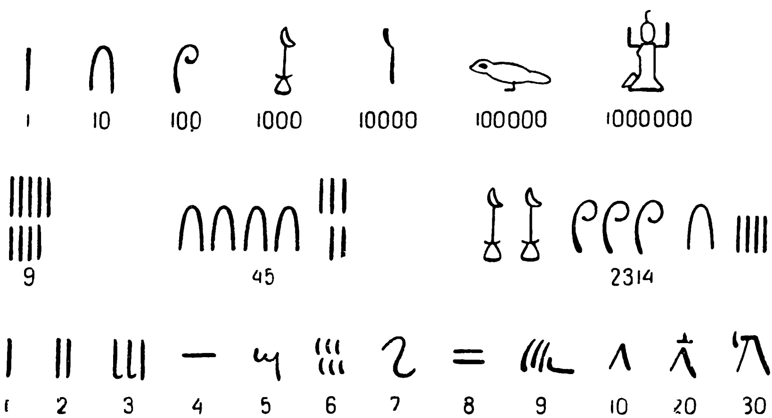


Рис. 14. Египетская нумерация.
в е р х н я я   с т р о к а — иероглифические цифры; в т о р а я   с т р о к а — числа 9, 45, 2314, записанные иероглифами; н и ж н я я   с т р о к а — иератические (жреческие) цифры.

вых исследований изложение содержания папируса Ахмеса под заглавием «Математика в эпоху гиксов» (гиксосов).

Московский папирус издан академиком В. В. Струве с немецким переводом в Берлине в 1930 г. Частичное изложение его

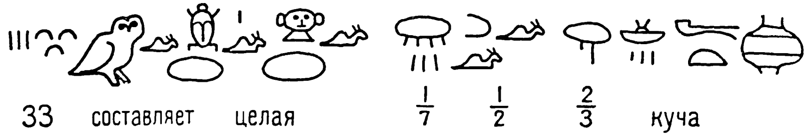


Рис. 15. Иероглифическая запись задачи (читается справа налево).

имеется в статье Д. П. Цинзерлинга «Геометрия в древнем Египте» («Известия Академии наук СССР, 1925). Папирус Ахмеса вызвал отражение в литературе на различных языках.

13. ГРЕЧЕСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Древнейшие греческие числовые знаки найдены в памятниках на острове Крите и относятся к эпохе, предшествующей на пять или шесть столетий периоду расцвета греческой культуры, т. е. к эпохе с XIV по VII в. до н. э.

В собственно Греции за этой системой числовых знаков последовала так называемая **аттическая** система (название происходит от области Греции — Аттики со столицей Афины), которая была в употреблении в эпоху первого известного по имени греческого математика Фалеса (624—547 гг. до н. э.) и в последующие за этим века до четвёртого. Эта цифровая система называет-

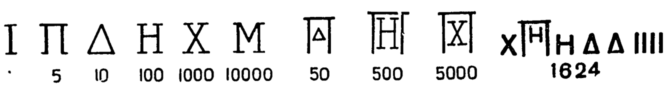


Рис. 16. Греческие аттические цифры, или геродиановы знаки.

ся ещё **геродиановыми** знаками, по имени грамматика Геродиана (II и III вв. н. э.), по трудам которого главным образом известны эти знаки. В аттической нумерации отдельные числа обозначались первыми буквами названий этих чисел.

На рисунке показаны изображения чисел: 5 (пенте), 10 (дека), 100 (гекатон), 1000 (хилиой), 10 000 (мириой). Все эти названия продолжают жить в современных терминах: пентагра́мма, пентагон[1], декаме́тр, гектоме́тр, киломе́тр, мириа́да.

Числа 50, 500, 5000 изображались комбинациями основных знаков, остальные числа — повторением их.

---

[1] *Пентагон* — пятиугольник. По пятиугольному зданию военного министерства США само министерство в газетных статьях обычно называется Пентагоном.

Геродиановы знаки встречаются в древнейших аттических памятниках; к эпохе афинского вождя рабовладельческой демократии Перикла (V в. до н. э.) они стали официальной системой числовых записей.

Около 500 г. до н. э. в Милете (в греческой малоазиатской колонии Ионии) возникла другая система греческой нумерации, использовавшая для письма чисел все буквы алфавита и некоторые старые, вышедшие к тому времени из употребления, буквы, сохранившиеся в греческом алфавите как дополнительные знаки. Таким образом, получили обозначения все числа до 10, полные десятки и полные сотни.

Для отличия цифровых знаков от букв над первыми ставилась горизонтальная чёрточка или же они снабжались штрихом; для обозначения тысяч перед соответственным цифровым знаком ставилась запятая. Число 10 000 обозначалось $M\upsilon$ или M (от слова «мириада»), кратные его — при помощи множителя впереди, позади или вверху:

$$2000 = \beta M = M\beta = M^{\beta} .$$

Символ M часто заменялся точкой. Эта система нумерации называлась **ионической;** при помощи её можно было записать просто все числа до $10^8—1$. В руках Архимеда и Аполлония она оказалась достаточно удобным аппаратом числовой записи, особенно после того как Аполлоний ввёл правило, по которому для умножения мириад следовало перемножить лишь коэффициенты при M — пифмены — и определить номер тетрад результата. Книга Аполлония о вычислениях под названием «Окитокнон» (в буквальном переводе означает «скорое разрешение от бремени», а по смыслу соответствует термину «быстросчётчик») остаётся нам пока неизвестной. Известный немецкий математик Гаусс (1777—1855), очень высоко ценивший гений Архимеда, упрекал его лишь в том, что он не пришёл к позиционной системе письма чисел. Как видно, это ему не особенно было нужно при ионийской нумерации.

Греческая ионийская нумерация при описательном, поверхностном ознакомлении кажется значительно менее удобной, чем позиционная десятичная, главным образом потому, что это ознакомление не сопровождается усвоением. Французский историк математики П. Таннери в 1882 г. заставил себя по-школьному изучить ионийскую нумерацию и убедился, что она в смысле быстроты вычислений лишь немного уступает позиционной десятичной нумерации.

При записи шестидесятеричных дробей греки со II в. до н. э. при отсутствии какого-нибудь разряда писали букву *о*, по-видимому, от слова, означавшего «ничто». В Афинах ионийская система вошла в употребление уже в III в. до н. э. в частной жизни и постепенно в государственных учреждениях [13].

Алфавит греки получили от семитических народов, но употребление букв алфавита для обозначения чисел является греческим изобретением. Этот принцип шёл обратно от греков к семитическим народам — евреям, арабам и другим, перенявшим его механически. У греков буквы алфавита получили числовые значения по месту, занимаемому ими в алфавите. Так буквы δ и ι

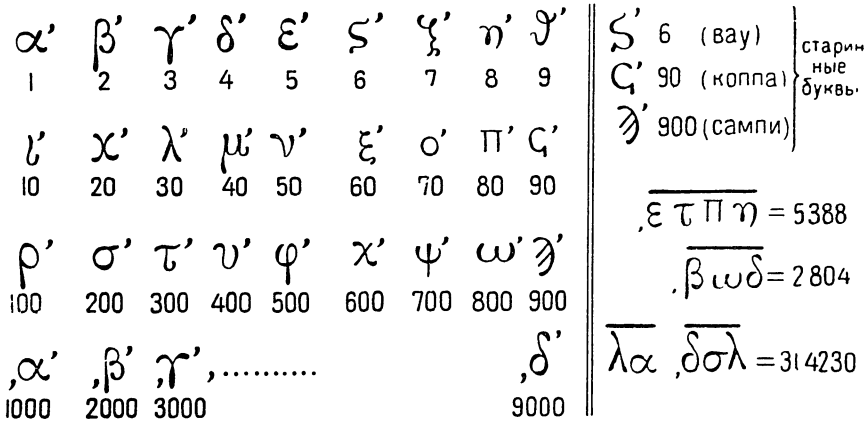


Рис. 17. Греческая ионийская нумерация.

обозначали 4 и 10 по своему месту в греческом алфавите. В арабской цифровой системе буквы, соответствующие греческим δ и ι, стали обозначать также числа 4 и 10, хотя в арабском алфавите эти буквы занимают восьмое и двадцать восьмое места, чем доказывается механический перенос арабами идеи ионийской нумерации греков.

Греческая ионийская нумерация продолжает существовать в Феце (Марокко). Она оказывается достаточной для решения сложных вычислений мусульманского наследственного права, хотя и недоступной для широких кругов, почему в Феце образованного человека квалифицируют формулой: «он хороший нотариус и делитель наследства». Отметим, что учебник ал-Хорезми, родоначальник европейских учебников алгебры, в значительной своей части занимается также решением задач по делению наследств.

14. СЛАВЯНСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Славянская нумерация по идее полностью совпадает с ионийской: числа изображались буквами, над которыми ставили особый знак титло. Хотя первыми буквами славянской азбуки были: аз, буки, веди — *а, б, в,* однако букве *б* не даётся числового значения, так как греческая буква β передавалась в славянском и русском письме буквами *б* и *в* (библиотека — вифлиофика). Числа 11, 12, 13 и т. д. записывались в славянской нумерации двумя соответственными буквами, причём знак еди-

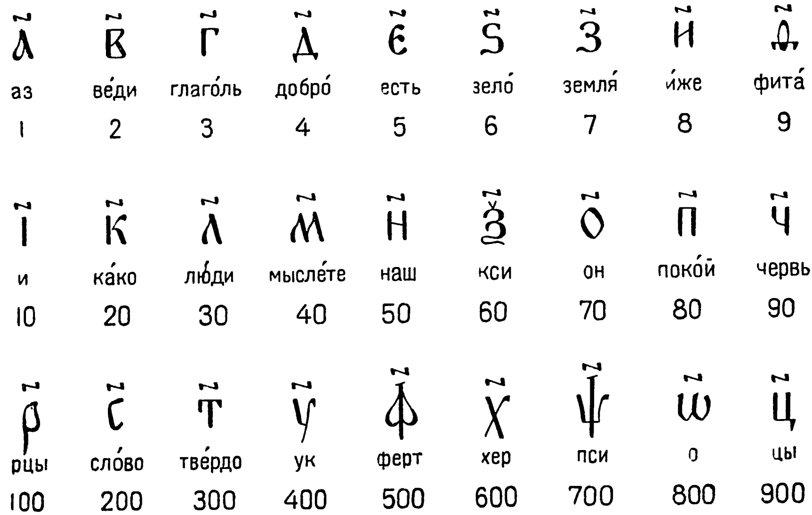


Рис. 18. Славянская нумерация.

ниц ставился перед знаком десятка; в числах же 21, 31 и т. д. сначала писался знак полных десятков. Для обозначения тысяч и миллионов перед числом их ставился знак, напоминающий запятую.

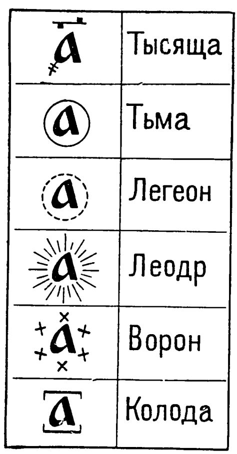


Рис. 19. Изображение больших чисел в славянской нумерации.

В дореволюционных учебниках грамматики русского языка встречаются термины: «*и* осьмеричное», что означает букву *и*, и «*и* десятеричное», что означает букву *и* с точкой (і). Эти названия получают объяснение из славянской нумерации. Буква *и* (осьмеричное) соответствовала греческой букве η (эта) и обозначала, как и греческая η, число 8; буква і (*и* с точкой или десятеричное) соответствовала греческой букве ι и обозначала, как и соответственная греческая буква, число 10.

Славянская нумерация употреблялась в России до XVIII в., после этого только в церковных книгах. В «Арифметике» Магницкого нумера листов даны ещё в славянской нумерации, которую мало кто знает, и обычно экземпляры этой редкой книги с отсутствующими страницами благополучно сходят за полные. Впрочем, незнание славянской нумерации свойственно не только людям наших дней. Ещё Пушкин писал в предисловии к «Истории села Горюхина»: «И мне ли рыться в летописях и добираться до сокровенного смысла обветшалого языка, когда не мог я выучиться славянским цифрам?»

Для обозначения больших чисел славяне изобрели способ, который не встречается у других народов. Одна и та же буква, например *а*, обозначала различные числовые единицы в зависимости от окружающей её фигуры.

15. РИМСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Римские числовые знаки, вопреки распространённому мнению, не происходят от букв алфавита. Давно доказано (историк Моммзен и др.), что римские цифры возникли на итальянской почве задолго до появления там алфавита. Мнение, согласно которому цифры I, V, X, суть палец, рука и две руки, не разделяется исследователями вопроса. Большим признанием пользуется взгляд: числа от 1 до 9 первоначально обозначались соответственным числом вертикальных чёрточек, 10 — перечёркнутой палочкой, 20 — двумя вертикальными палочками, перечёркнутыми косо, и т. д. Вообще перечёркивание некоторого числа палочек означало удесятерение числа. Число 5 обозначали половиной косого креста (знака для 10), причём соседи римлян этруски употребляли для обозначения числа 5 нижнюю часть знака десяти, римляне — верхнюю часть. Для обозначения числа 100 ($=10 \cdot 10$) перечёркивали палочку два раза или применяли кружок с точкой внутри. Число 50 обозначалось половиной этого знака.

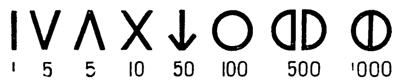


Рис. 20. Ранние римские цифры.

Обозначения римскими цифрами в ранний период 1000, 500 и т. д. показаны в помещённой ниже таблице. Символ для 500, очевидно, есть половина знака для 1000.

Таким образом, ясно, что происхождение римских цифр с алфавитом не связано. Лишь в позднюю пору римской культуры произошло некоторое сближение начертания цифр и букв алфавита. Так, в качестве знака для числа 100 (centum) стали писать C, для обозначения числа 1000 (mille) — *M* и т. д. Эта эволюция ясна из предлагаемой таблицы. Римские цифры долго держались в учебниках и после проникновения в Европу современных цифр и назывались школьными. Авторы XV и XVI вв., как часто и современ-

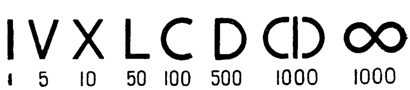


Рис. 21. Римские цифры более поздней эпохи.

ные английские авторы, писали римские цифры строчными буквами. Употреблялась и такая запись:

$$\text{II}^{c} = 200; \quad \text{IX}^{c} = 900; \quad \text{III}^{м} = 3000 \text{ и т. д.}$$

В римской нумерации, как и в вавилонской, применяется принцип вычитания; так, например, пишут: для числа 9 вместо VIIII знак IX, вместо XXXX знак XL и т. д. Нужно заметить, что в римских памятниках этот принцип не применяется строго и систематически, как видно из приложенного снимка.

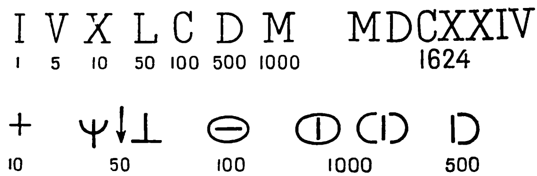


Рис. 22. Римская нумерация.

В связи с упоминанием этрусских числовых знаков обращает на себя внимание неразрешённая до сих пор историческая загадка. В 1848 г. археологи при раскопках нашли две игральные кости с надписями на гранях. Можно полагать, что это записи числительных. Эти записи до сих под остаются нерасшифрованными (Б. Казанский, Разгаданная надпись, 1935).

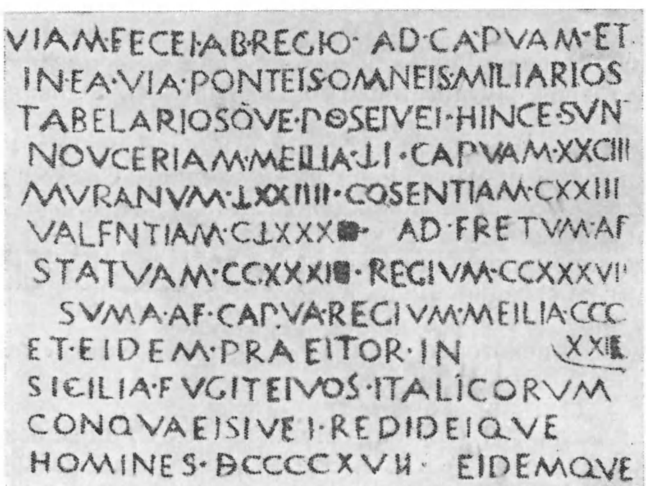


Рис. 23. Снимок с надписи римского дорожного столба, указывающего расстояния от Региума (130 г. до н. э.).

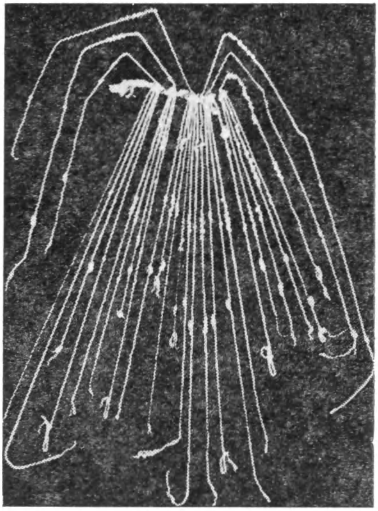


Рис. 24. Узловая нумерация «квипу».

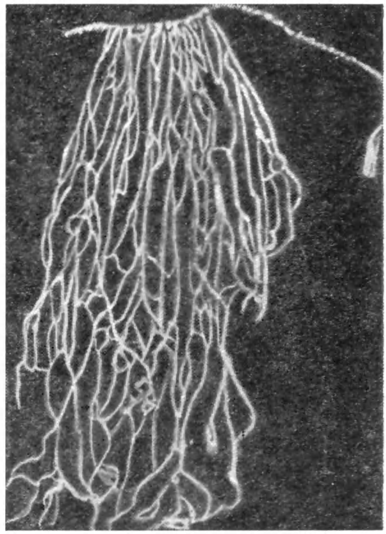


Рис. 25. Перуанский узловой счёт «квипу».

16. УЗЛОВАЯ НУМЕРАЦИЯ

Некоторые народы — древние перуанцы, живший в центральной Америке народ майя и др. — изображали числа разноцветными узлами или бахромой на шнуре.

У этих народов существовал класс специальных чиновников, «хранителей государственных архивов», толковавших населению по узловым «записям» налоговые предписания, объявлявших календарные даты, праздники и т. д., словом, класс чиновников, соответствующих классу египетских писцов.

Об изображении чисел перуанцев можно найти более подробные сведения в брошюре Г. Н. Попова «Математическая культура древнего Перу», Пг., изд. «Сеятель», 1923.

17. КИТАЙСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Как видно из помещаемого здесь снимка, китайские цифры являются иероглифами, как и китайское письмо.

Китайцы очень долго пользовались пятеричным счислением, сохранившим следы в устройстве суанпан.

В ранних китайских книгах проявляется интерес, в частности, к так называемым магическим квадратам. Магическими квадратами называется расположение первых 9, 16, 25 и так далее чисел натурального ряда в квадратной сетке таким образом, чтобы суммы чисел по рядам, столбцам и диагоналям оказались равными.

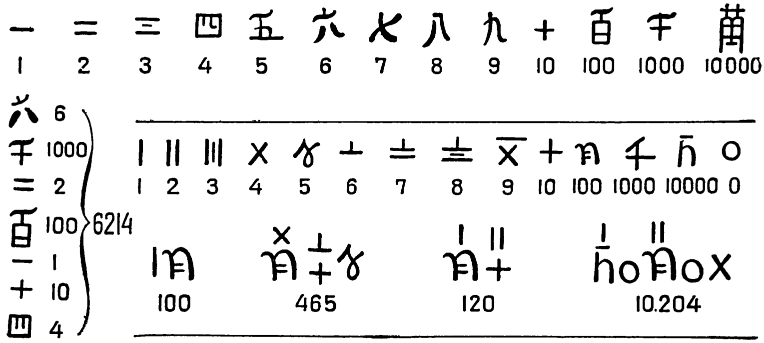


Рис. 26. Китайская нумерация.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 27.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 28.

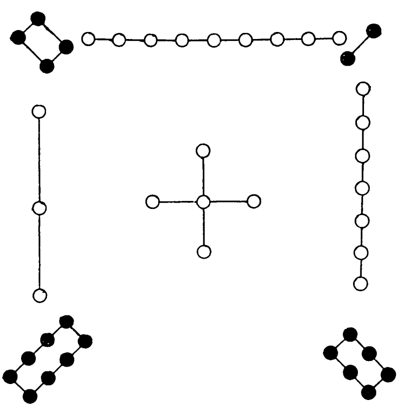


Рис. 29. Древнейший в мире магический квадрат.

Отметим, что магические квадраты появляются и в европейской литературе. В рукописном сборнике XIII в. находим такую задачу: «В Кёльне было 3 брата, имевших 9 сосудов с вином: первый ёмкостью в 1 кварту, второй — в 2 кварты, третий — в 3 кварты и так далее, каждый следующий — одной квартой больше. Требуется разделить вино поровну между тремя братьями, не переливая из сосуда в сосуд».

Составив магический квадрат из 9 чисел (смотри выше), имеем сразу 12 решений: столбцы квадрата можно распределить между тремя братьями шестью способами, равно как и строки.

В новое время европейские математики проявляли много раз интерес к магическим квадратам. О них существует обширная литература. Магические квадраты породили много суеверий, но из свойств их делались и серьезные применения.

18. НУМЕРАЦИЯ НАРОДА МАЙЯ

В Центральной Америке (Республики Гватемала и Гондурас) были открыты древние городища культурного народа майя, процветавшего в период от I в. до н. э. до XII в. нашего времени и достигшего высокого развития в VI в. У майя обнаружена астрономия, превышающая по точности вавилонскую, с датированными событиями 3373 г. до н. э., причём даты даются с точностью до одних суток. В самой глуши непроходимых лесов открываются остатки великолепных архитектурных и художественных памятников этого народа.

Всё это казалось бы невероятным, если бы не издавались десятки исследований со снимками с памятников майя, если бы не печатался длинный ряд исследований по астрономии майя, например большие мемуары берлинского академика Людендорфа.

Система счисления майя основывается на их астрономических данных. Гражданский год у них содержит 360 дней, которые делятся на 18 месяцев, по 20 дней в каждом. В числовой системе майя, в которой числа пишутся столбиком снизу вверх, на первом месте стоят единицы; единицы второго разряда, в соответствии с числом дней в месяце, в 20 раз больше, т. е. двадцатки. Единицей третьего разряда являются $(18 \cdot 20 =)360$ в соответствии с числом дней в году. Дальнейшие разрядные единицы составляются все по двадцатеричной системе. Таким образом, майя мог назвать первый разряд своего числа сутками, второй — месяцами, третий — годами. Отсутствие какого-нибудь разряда указывалось специальным знаком, появившимся около 500 г. н. э., вроде изображения глаза (наш нуль), так что майя уже в тот период осуществили идею позиционной системы. В изображении чисел ясно выступают пережитки пятеричной системы: число 5 изображалось горизонтальной чёрточкой, 10 — двумя, 15 — тремя чёрточками. Числа 6, 7, 8, 9 изображались чёрточкой, над которой ставили одну, две, три или четыре точки.

Впрочем, современные индийские историки математики (например, Гангули), отстаивая приоритет своей родины в изобретении позиционной системы, призывают к осторожности в суждениях о математике майя. Майяведение — одна из самых молодых ветвей науки — развивается чрезвычайно быстро. Большие издания памятников майя выходили и продолжают выходить в настоящее время. Развитие культуры майя, которая характеризуется чертами раннего неолита (каменного века), в глуши лесов и болот, нужно отнести к большим культурно-историческим загадкам.

Изучение астрономии и математики майя может дать сюрпризы для истории точных наук.

Более подробные сведения по истории возникновения различных систем нумерации можно найти в работе И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича «Происхождение систем счисления» в «Энциклопедии элементарной математики» (кн. 1: «Арифметика», Академия педагогических наук РСФСР, 1951).

Иероглифические надписи народа майя, вырезавшиеся до IX в. н. э. на камне, а с этого времени писавшиеся на изобретённой народом майя бумаге более высокого качества, чем египетский папирус, американскими исследователями прочитаны в очень незначительной части. В 1955 г. в издании Академии наук СССР вышла книга: Ю. В. Кнорозов, Система письма древних майя.

Судьба народа майя и его культуры является повторением явления, не раз имевшего место в истории человечества. Культура майя была уничтожена католическим духовенством при принудительном обращении народа майя в христианство и одновременном разграблении его богатств. Францисканский монах Диэго де Ланда, один из участников этой «миссионерской экспедиции», в 1562 г . пишет: «Мы нашли у них (майя) большое количество книг, и так как в них не содержалось ничего, кроме суеверия и лжи дьявола, мы все их сожгли, о чём они (майя) удивительно сожалели», Диэго де Ланда, Сообщение о делах в Юкатане, изд. АН СССР, 1955.

19. ИНДИЙСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Индийская математика при всей значительности очень бедна древними документами, которые могли бы установить точные этапы её возникновения и развития. Сведения о её отдалённом прошлом основываются почти исключительно на устных преданиях и поздних их записях.

Народы Индии имеют очень древнюю культуру, одновременную с древневавилонской и др. За последние десятилетия раскопан древний город Мохенджо-Даро («место мёртвых») в Пакистане, в бассейне реки Инд (II и III тысячелетия до н. э.), где обнаружены многочисленные памятники архитектуры, ирригационные сооружения, наличие иероглифического письма. Всё это свидетельствует о высокой культуре народов Индии в эпоху древнейшего рабовладельческого государства, владевших техникой обработки металлов, меди, олова, серебра и золота. Город Мохенджо-Даро имел хорошую планировку с улицами, пересекающимися под прямым углом, двух- и трёхэтажные дома из обожжённого кирпича. В огромном дворце располагалась металлургическая мастерская — факт, показывающий отношение властей города к развитию техники. Продукцию мастеров Мохенджо-Даро находят на берегах Средиземного моря, что свидетельствует о высоком уровне техники производства в древней Индии. Рядом с остатками домов богатых кварталов с канализационной системой и искусственными колодцами имеются кварталы хижин бедноты, сплетённых из прутьев и обмазанных глиной.

Естественно ожидать, что при таком высоком уровне развития цивилизации у народов Индии той эпохи существовала достаточно высоко развитая наука, в частности математика. Документы о науке того времени нам мало известны. Записи делались на непрочном материале (на пальмовых листьях, берёсте), который не мог долго сохраниться при влажном и тёплом климате Индии.

Многие источники, на которых основывали доказательство древности отдельных достижений математической культуры, оказались сомнительными. «Так, из семнадцати древних цитат, содержащих позиционные записи, только две оказались неподдельными» (см. «Энциклопедия элементарной математики», кн. 1, 1951, стр. 44).

Одним из самых ранних индийских письменных математических памятников является отрывок рукописи из Бакхшали, написанный на берёсте. Он найден в 1881 г. и различными исследователями относится к разным годам между 200 и 1000 гг. н. э. Арифметику Бакхшали считают списком с более древней рукописи, относимой по языковым признакам к первым векам нашей эры, против чего резко выступал английский исследователь Кей (1886—1929). В арифметике Бакхшали имеется точка для обозначения нуля, форма цифр несколько напоминает современные санскритские цифры. Санскритский язык, который уже в III в до н. э. был мёртвым, всё ещё продолжает оставаться языком религиозных учёных Индии и занимает в отношении современных индий-

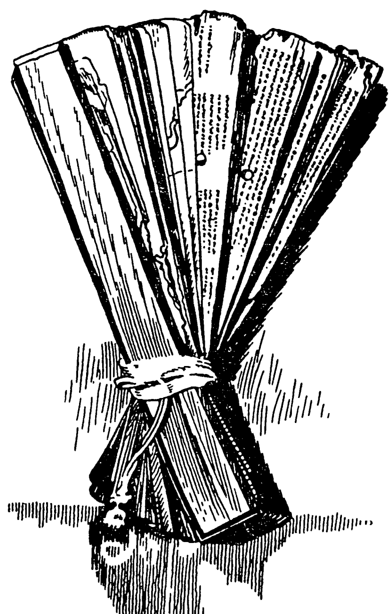


Рис. 30. Старинная индийская арифметика, написанная на полосках пальмовых листьев.

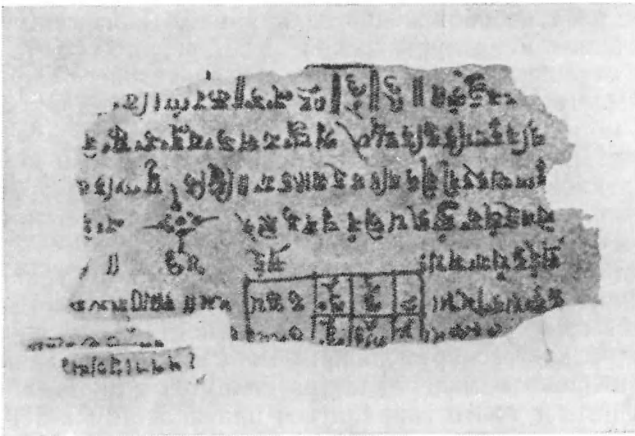


Рис. 31. Фотоснимок с древнего индийского математического памятника, написанного на берёсте (Бакхшалийская арифметика).

ских языков положение, аналогичное положению латинского языка в отношении к французскому и итальянскому.

В V в. до н. э. Индией овладели персы, управляя ею через своих чиновников, пользовавшихся арамейским языком, бывшим до VI—VII вв. международным в дипломатических и коммерческих сношениях. Это был язык семитического народа, населявшего области Малой Азии между Палестиной (Израилем), Финикией, Аравией, с одной стороны, и рекой Тигром — с другой. Греки называли Арамею Сирией[1]. Арамейские чиновники распространили в Индии сирийско-арамейское письмо, приспособленное к индийским наречиям, вследствие чего создалось раннее индийское письмо кхарости. Числовые знаки того периода взяты в основном из алфавита кхарости, с внедрением особенностей сирийской нумерации с преобладанием основы 20. Так, например, число 50 пишется в виде знака для 10 и двукратного знака для 20, число 60 — три раза повторенными знаками для 20, что чуждо собственно индийской нумерации.

Народы Индии с древнейших времен создали систему названий для десятичных разрядов до высоких пределов, что позволило им произносить большие числа значительно короче, чем, например, грекам, которые употребляли названия вроде мириа-

---

[1] До последнего времени арамейский алфавит считался самым древним в мире. В 1950 г. Клод Шефер в Верхней Сирии открыл более древний алфавит из 22 букв, расположенных в том же порядке, как в финикийском и европейском. Этот алфавит относится в XIV в. до н. э. и является древнейшим из известных в настоящее время (сведения из доклада во Французской Академии надписей, 1950).

ды мириад и т. д. Когда все разряды в большом числе были налицо, индиец мог читать только число единиц в каждом разряде, подобно тому, как мы в настоящее время говорим нумер телефона; при отсутствии единиц какого-нибудь разряда индиец вместо числа единиц этого разряда говорил «пусто». Отсюда, вероятно, возникла идея о том, что названия разрядов можно не писать, что они определяются нумером места, а места «пустых» разрядов надо обозначать каким-нибудь знаком. В первое время для этого употреблялась точка.

Есть основания полагать, что таким образом возникла позиционная система нумерации в Индии не позже начала нашей эры. Однако документальные памятники не идут в такую даль веков; бакхшалийскую рукопись Кей относил к XII в. Древнейший памятник позиционной системы видели в надписи Гурджара 595 г., но она признана неподлинной. В трудах Брамагупты (род. в 598 г.), которые известны лишь по поздним копиям, даются правила действия с нулём. Однако понимание и таких учёных трудов затруднено тем, что индийские учёные писали стихами, в которых числа обозначались различными звучными словами, допускавшими чрезвычайно большую поэтическую вольность для автора и создавшими исключительные трудности для читателя, особенно не индийца. Вот для иллюстрации один способ передачи чисел индийской древней записи. Написав цифры 1, 2, 3,..., 9, 0, подписывали под ними по порядку согласные буквы санскритского алфавита. Так как букв этих больше десяти, то их помещали в два или три ряда, так что под каждой цифрой оказалось (столбиком) две или три буквы. Пользуясь латинскими согласными, получаем таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
b	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*j*	*k*	*l*	*m*
n	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*v*	*w*	*x*	*y*
z									

Какое-нибудь число, скажем 184, может быть записано буквами, взятыми из столбиков букв под 1, 8 и 4, что даёт целый ряд записей. Между согласными вставляли гласные так, чтобы получилось какое-нибудь слово, которое и служило записью числа. Для нашего примера (184) можно взять буквы $1=n$, $8=k$, $4=r$ (получаем *nkr*) и вставить гласные: *nekar* (некар). Такова запись числа 184.

Профессор Карпинский справедливо замечает по этому поводу, что употреблявшие такую систему люди имели, очевидно, очень много свободного времени для разгадывания таких арифметических ребусов.

Апангар Сриниваса Раманудьян — известный индийский математик (1887—1920).

Конечно, описанная здесь «ребусная арифметика» есть дело далёкого прошлого. Современные индийские математики разрабатывают очередные вопросы мировой науки. Однако и в современной индийской математике проявляется специальный интерес к теории чисел, в которой индийские математики делали и делают особенные успехи.

Кроме всего этого, надо иметь в виду, что индийские математики обычно подбирали для чисел возможно более поэтические и звучные названия и стихи для задач.

Вот пример такой стихотворной задачи:

Над озером тихим, с полфута над водой,
Высился лотоса цвет.
Он рос одиноко и ветер волной
Нагнул его в сторону — и уж нет
Цветка над водой.
Его нашла рыбака рука
В двух футах от места, где рос.
Сколь озера здесь вода глубока?
Тебе предложу я вопрос.

Изложение знаний стихами ведёт своё начало из Греции, где, например, Арат (315—239 до н. э.), поэт, математик и филолог, написал стихами ряд трактатов, из которых до нас дошло только его изложение астрономии и метеорологии. С этого произведения, переведённого Цицероном стихами на латинский язык, существует русский стихотворный перевод [14].

Стихотворные изложения наук преследовали педагогическую цель: стихотворная форма легче и точнее удерживается в памяти, так как «из песни слова не выкинешь». В стихах излагали науку и другие греческие учёные. Около 1250 г. Александр Галдус написал в 2645 стихах «Песнь об алгоризме»; она много содействовала распространению индийских цифр в Европе, а затем уже многие века почти ни один учебник арифметики не обходился без стихов.

Характер этой арифметической поэзии или поэтической арифметики можно видеть у Магницкого, правда, уже только в виде поучений и методических указаний. Вот некоторые места из «Арифметики» Магницкого к таблице сложения:

К двум един, то есть три,
Два же к трем, пять смотри.
Так и все назирай,
Таблицу разбирай.
Хотяй же не лгати,
Похвально слагати
Да тщится познати
Изустно сказати.

Дав способ, как сокращённо, почти механически, решать задачи на тройное правило, Магницкий внушает:

А смотри всех паче
Разума в задаче,
Потому бо знати,
Как сие писати!

Подобными стихами заканчиваются все разделы «Арифметики» Магницкого [15].

Имея в виду всё сказанное об Индии, нужно ожидать резких противоречий в оценке роли этой страны в вопросах возникновения нашей нумерации.

По мнению критически настроенных авторов (Кей), древнейшая надпись в позиционной системе относится к 813 г. (Торхедские медные доски), древнейшее появление кружковидного нуля — к 876 г. (Гвалиорская надпись). По мнению таких авторов, 9 цифр не являются индийскими, а заимствованы от народа, который писал справа налево, а не наоборот, как индийцы.

Они считают, что индийская математика не самостоятельна: ряд математических памятников их является заимствованиями от греков.

Индийский математик Брамагупта (VII в. н. э.) признаётся не раз в заимствованиях от греков, как и его комментаторы (Бхаскара, XII в.).

Высказывалось сомнение относительно самостоятельного изобретения индийцами позиционной системы. Вычисления над разрядными цифрами (пифменами) у греческого математика Аполлония требовали определения нумера, занимаемого пифменом места, хотя у него и нуля не было. Но знак для нуля *O* (буква «омикрон») был у Птолемея (II в. н. э.), выдержки из труда которого вошли в книги индийцев.

Высказывалось предположение, что труды греческого математика Диофанта (III—IV в. н. э.) и его толкователя Ипатии (начало V в. н. э.) были известны в Индии, как и не дошедшие до нас греческие книги о счёте, чем, быть может, и объясняется развитие в Индии тех же разделов математики, которыми занимался Диофант, например теории неопределенных уравнений.

В VI в. указ византийского императора Юстиниана о воспрещении языческих школ (529) заставил бежать греческих учёных новоплатоновской школы из Афин в Персию, где воспитывались первые арабские учёные, возглавлявшие науку в тече-

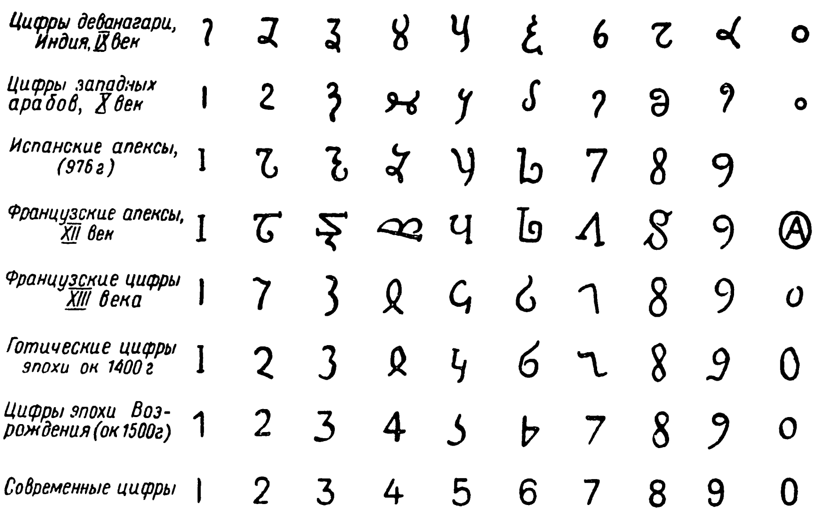


Рис. 32. Краткая таблица эволюции индийских цифр в современные [16].

ние ближайших веков. Таким образом, греческое и персидское влияния могли оказывать совместное действие на развитие науки в Индии.

С другой стороны, нужно учесть факт, что сирийский епископ Северус Себокхт, стоявший во главе учёной академии на Евфрате, в 662 г. н. э. пишет об «искусном методе индийского счисления при помощи 9 знаков, для восхваления которого нельзя найти достаточных слов». Себокхт, знакомый с греческой александрийской наукой, не приписал бы позиционной системы индийцам, если бы она была греческого происхождения.

Во всяком случае очень раннее пользование позиционной системой в Индии не может быть оспариваемо, если даже стать на критическую точку зрения Кея и его единомышленников. И они допускают, что позиционная система и знак нуля были в Индии известны ранее тех дат, которые устанавливаются дошедшими до наших дней письменными памятниками.

Какой народ был изобретателем позиционной системы нумерации — этот вопрос, как видно из сказанного, не до конца ясен, но всё же большинство авторов считает позиционную систему индийским изобретением. Притом всеми признаётся, что изобретение это таково, что, по словам современного историка науки, «не требует никаких международных конгрессов и комиссий для его улучшения». Это, может быть, единственное совершенное изобретение человека.

Всё преимущество позиционной системы нумерации перед всеми другими системами зависит от существования в ней нуля. «Изобретение чего-то, что должно было представлять ничто» —

центральный момент окончательного шага развития систем счисления [17]. Французский математик Лаплас (1749—1827) пишет о позиционной системе нумерации: «Мысль — выражать все числа знаками, придавая им, кроме значения по форме, ещё значение по занимаемому месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно осознать, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этому, мы видим ясно на примере величайших гениев греческой учёности Архимеда и Аполлония, для которых эта мысль осталась скрытой».

Учитель и ученики на уроках арифметики должны гордиться тем, что они занимаются усвоением этого великого изобретения человека.

20. АРАБСКАЯ МАТЕМАТИКА И НУМЕРАЦИЯ

Сирийско-арабские народы под влиянием греков разработали свои системы нумерации при помощи букв имевшегося у них алфавита. Из таких систем более интересны **пальмирская**[1], **сирийско-арамейская,** упомянутая выше, **и древнеарабская.** В начале VII в.[2] произошло быстрое объединение арабских племён и распространение их торговых и политических связей на многие страны. Это потребовало усовершенствования их цифровой системы, что шло очень медленно. Большинство арабских писате-

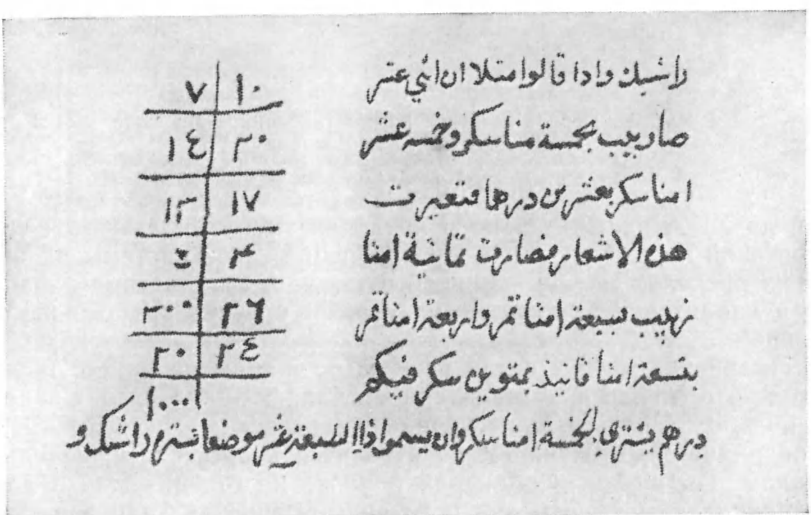
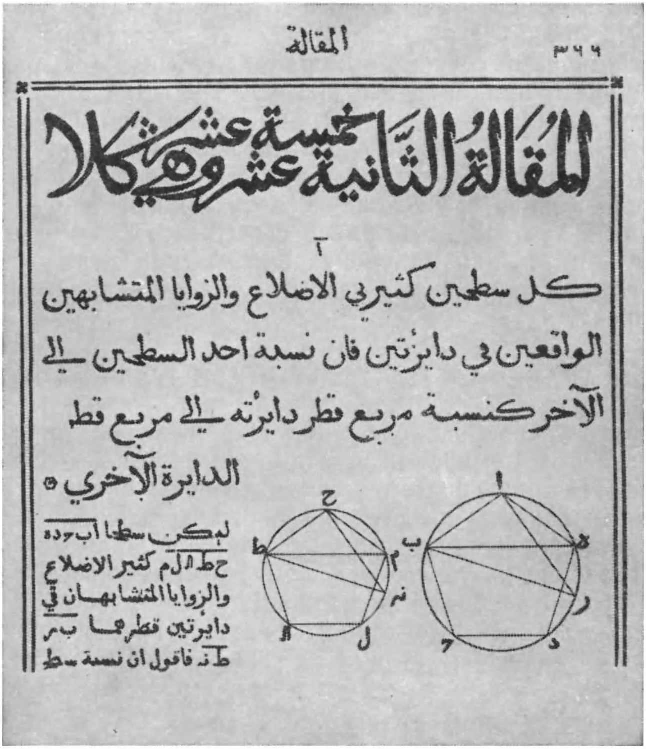


Рис. 33. Отрывок арабской арифметической рукописи ал-Беруни.

[1] *Город Пальмира* — знаменитый узловой пункт торговых путей в Сирийской пустыне, процветавший в первые века нашей эры.

[2] Выступление — «бегство» — Мухаммеда (Магомета) относится к 622 г.


المقالة ٣٦٦

المقالة الثانية عشر وهي خمسة عشر شكلا

آ

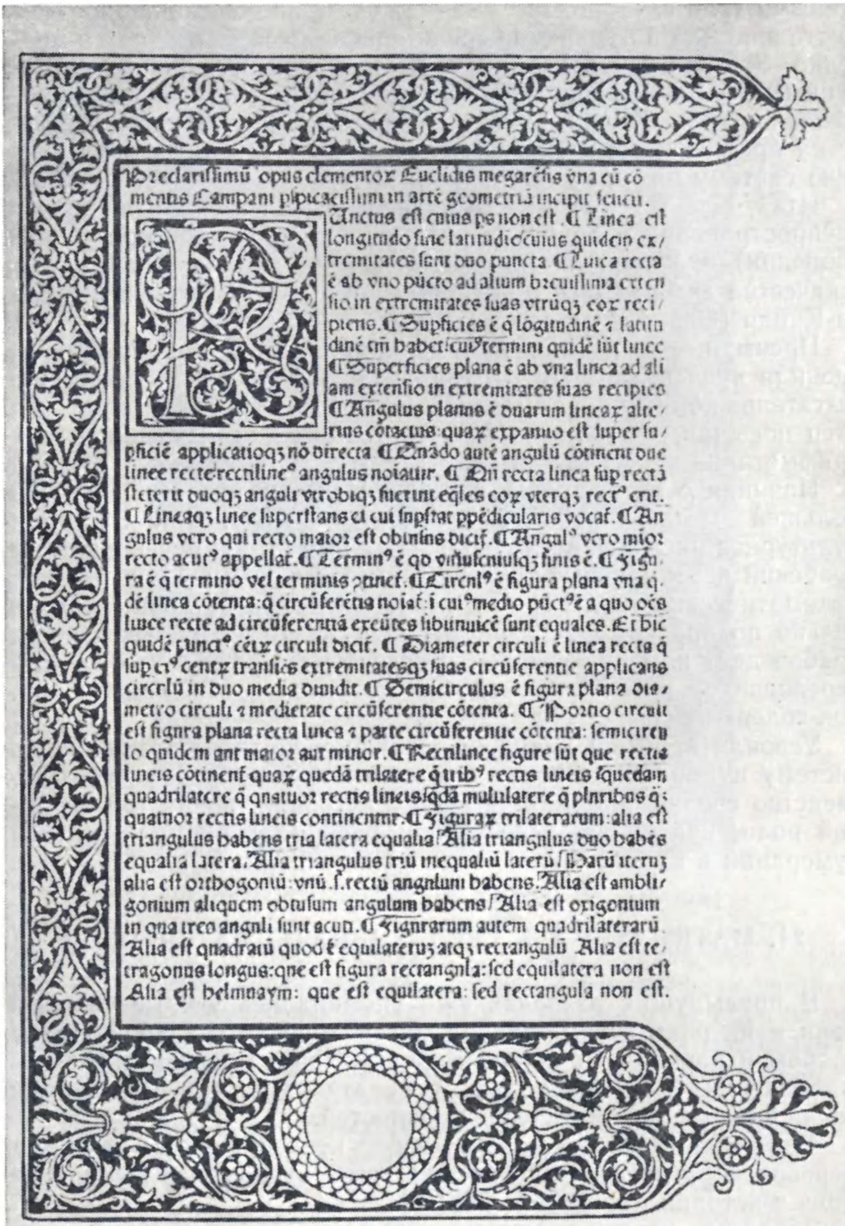
كل سطحين كثيري الاضلاع والزوايا المتشابهين
الواقعين في دايرتين فان نسبة احد السطحين الى
الآخر كنسبة مربع قطر دايرته الى مربع قطر
الدايرة الآخري ○

لنكن سطحا ا ب ج د ه
ح ط ك ل م كثير الاضلاع
والزوايا المتشابهان في
دايرتين قطرهما ب ر
ط ن فاقول ان نسبة سطح

Рис. 34. Первое печатное комментированное арабское издание «Начал» Евклида.

лей до XI в. включительно в пределах тысячи пользуются ещё словесной передачей чисел. Употребление такой системы даже в узких пределах между единицей и тысячей было весьма неудобно и характеризует низкий культурный уровень арабов ещё в то время.

Индийские цифры стали известны арабам не ранее 700 г. Около этого года правитель арабов халиф Валид издаёт запрещение пользоваться чужестранным (греческим) письмом, но оговаривается, что запрет не относится к греческим числовым знакам. Об индийских цифрах в указе не говорится, что даёт основание думать, что они в то время ещё не были известны арабам. Однако в конце VIII в. арабские астрономы уже пользуются ими. В 773 г., по приказу халифа ал-Мансура, переводится астрономический трактат индийского математика Брамагупты и превращается под названием «Синдхинд» в руководство для арабских астрономов. С индийской нумерацией знакомят арабов среднеазиатские учёные, в первую очередь Мухáммед из



Preclarissimū opus elementoꝝ Euclidis megarēsis vna cū cō
mentis Campani pspicacissimi in artē geometriā incipit feliciter.
Punctus est cuius ps non est. ¶ Linea est
longitudo sine latitudie cuius quidem ex-
tremitates sunt duo puncta. ¶ Linea recta
ē ab vno pūcto ad aliū breuissima exten-
sio in extremitates suas vtrūqʒ eoꝝ reci-
piens. ¶ Supficies ē q̄ lōgitudinē ⁊ latitu-
dinē tm̄ habet: cui⁹ termini quidē sūt linee
¶ Superficies plana ē ab vna linea ad ali-
am extensio in extremitates suas recipiens
¶ Angulus planus ē duarum lineaꝝ alter-
nus cōtactus: quaꝝ expansio est super su-
pficiē applicatioqʒ nō directa. ¶ Quādo autē angulū cōtinent due
linee recte rectiline⁹ angulus noiatur. ¶ Qñ recta linea sup rectā
steterit duoqʒ anguli vtrobiqʒ fuerint eq̄les eoꝝ vterqʒ rect⁹ erit.
¶ Lineaqʒ linee superstans ei cui supstat ppēdicularis vocat. ¶ An-
gulus vero qui recto maior est obtusus dicit. ¶ Angul⁹ vero mior
recto acut⁹ appellat. ¶ Termin⁹ ē qd vniuscuiusqʒ finis ē. ¶ Figu-
ra ē q̄ termino vel terminis ɔtinet. ¶ Circul⁹ ē figura plana vna q-
dē linea cōtenta: q̄ circūferētia noiat: i cui⁹ medio pūct⁹ ē a quo oēs
linee recte ad circūferentiā exeūtes sibiinuicē sunt equales. Et hic
quidē punct⁹ cētꝝ circuli dicit. ¶ Diameter circuli ē linea recta q̄
sup ei⁹ centꝝ transiēs extremitatesqʒ suas circūferentie applicans
circulū in duo media diuidit. ¶ Semicirculus ē figura plana dia-
metro circuli ⁊ medietate circūferentie cōtenta. ¶ Portio circuli
est figura plana recta linea ⁊ parte circūferentie cōtenta: semicircu-
lo quidem aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sūt que rectis
lineis cōtinent quaꝝ quedā trilatere q̄ trib⁹ rectis lineis quedam
quadrilatere q̄ quatuor rectis lineis qdā multilatere q̄ pluribus q̄
quatuor rectis lineis continentur. ¶ Figuraꝝ trilaterarum: alia est
triangulus habens tria latera equalia. Alia triangulus duo habēs
equalia latera. Alia triangulus triū inequaliū laterū. Haꝝ iterū
alia est orthogoniū: vnū. s. rectū angulum habens. Alia est ambli-
gonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigonium
in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarum autem quadrilateraꝝ.
Alia est quadratū quod ē equilaterū atqʒ rectangulū. Alia est te-
tragonus longus: que est figura rectangula: sed equilatera non est.
Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

Рис. 35. Первое печатное издание «Начал» Евклида в переводе с арабского с комментариями Кампануса.

Хорезма (или ал-Хорезми) в начале IX в., но понимание преимуществ индийской нумерации среди арабов распространяется медленно. Знаменитый хорезмийский математик и астроном ал-Беруни (973—1048), написавший на основании собственных наблюдений книгу об Индии, отмечает индийскую нумерацию и сетует на арабов, которые, по его словам, хотя и приняли эту лучшую систему цифр, но не уяснили внутреннего её достоинства.

Итак, ещё к XI в. индийские цифры не получили широкого распространения у арабских учёных. В большом обзоре (энциклопедии) арабской литературы и науки, написанном в 987 г. в качестве авторов по индийскому счислению, названы лишь ал-Кинди (800—870) и ал-Суфи (умер в 986 г.).

Преимущества индийской нумерации, как позднее и в Европе, оценили купцы. Знаменитый таджикский философ и естествоиспытатель ибн-Сина (Авиценна, 980—1037) рассказывает, что отец посылал его мальчиком к торговцам для изучения новой арифметики.

Начиная с IX в. арабы в течение шести столетий владели большей частью прежнего культурного мира. Они собирали культурное наследие всех покорённых ими стран, переводили на арабский язык научные труды народов Европы и Азии. Многие математические труды греков известны нам в настоящее время только по арабским переводам. О размахе этой деятельности арабов даёт нам представление хотя бы тот факт, что список переводчиков и толкователей (комментаторов) Евклида у арабов содержит свыше 100 имён.

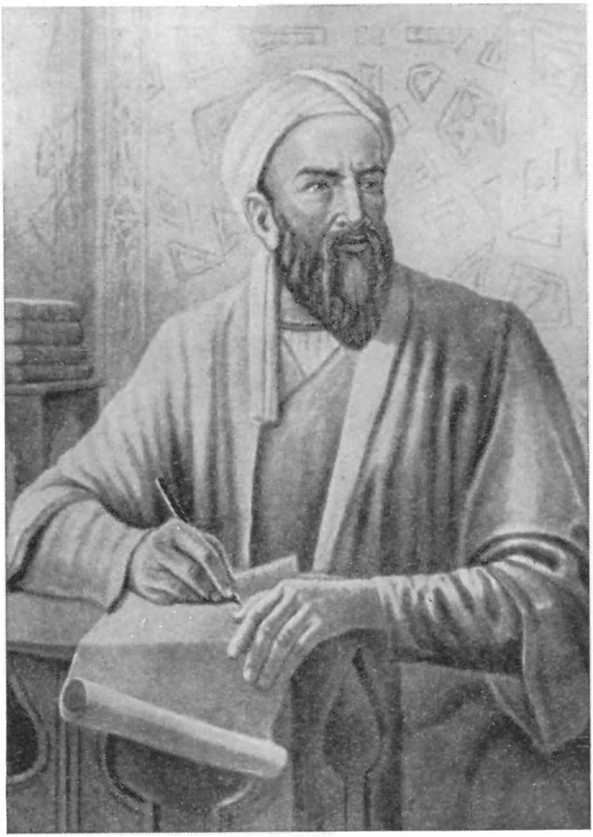
Усвоили арабы и индийскую арифметику и её позиционную систему нумерации. Произошло это главным образом через посредство среднеазиатских учёных, с которыми ввиду той огромной роли, какую они играли при распространении индийской нумерации в Европе, нужно познакомиться особо.

21. МАТЕМАТИКА У СРЕДНЕАЗИАТСКИХ НАРОДОВ

В предыдущих разделах уже упоминались учёные Средней Азии и их роль передатчиков математических знаний Индии арабам и народам Западной Европы. Однако среднеазиатские математики были не только передатчиками, но и творцами очень важных математических ценностей.

Советские историки математики за последние годы дали ряд переводов работ среднеазиатских математиков и выяснили их роль в истории мировой науки [18].

Западные историки математики называют среднеазиатских математиков арабскими на том основании, что они писали на арабском языке. Верно, что в большинстве случаев среднеазиатские математики писали на арабском языке, как языке международном для того времени, и для народов, входивших в арабскую



Абу Рейхан ал-Беруни. (С картины *М. Набиева.*)

политическую систему. Однако и здесь были исключения. Некоторые из этих учёных писали на персидском языке, а часть их трудов известна только на местных — узбекском и таджикском языках. Однако и в том случае, если бы все работы среднеазиатских математиков были написаны на арабском языке, их авторов нельзя было бы назвать арабскими учёными.

Мы не называем учёных европейских народов латинскими из-за того, что они до XIX в. почти исключительно, а в XIX в. в весьма значительной своей части писали свои учёные труды на латинском языке. На латинском же языке написаны почти все труды петербургских академиков за первые 50 лет существования Петербургской Академии наук, в том числе работы М. В. Ломоносова и других русских по национальности академиков.

Среднеазиатские учёные были представителями своих национальных культур, имеющих многовековую историю и большие достижения. Последние не все дошли до нас, так как завоева-

Насирэддин Туси. (С портрета *Г. Ализаде*.)

тели, а их было много у стран Средней Азии, уничтожали культуру побеждённых. Патриот своей родины ал-Беруни пишет про одного из таких захватчиков: «Кутейба (первые годы VIII в. [19]) всеми способами рассеял и уничтожил всех, кто знал письменность, кто хранил её предания, всех учёных, кто был среди них, так что покрывалось всё мраком и нет истинных знаний о том, что было известно из их истории» («Древний Восток», под ред. акад. В. В. Струве).

Расцвет математической культуры имел место и в Азербайджане. Труды работавшего там Насирэддина Туси (1201—1274) упоминаются в наших учебниках геометрии и рассматриваются в курсах оснований геометрии и тригонометрии. С частью их можно познакомиться по изданному в 1952 г. Академией наук Азербайджанской ССР русскому переводу «Трактата о полном четырёхстороннике» Мухаммеда Насирэддина Туси.

Насирэддин Туси выражает определённо понимание самостоятельности среднеазиатских учёных. Он пишет, говоря об одном существенно важном научном вопросе: «К этому выводу идут различными путями, которые все изложены в книге нашего великого учителя Абу Рейхан Беруни, озаглавленной «Ключ к познанию фигур на поверхности сферы». В другой работе Насирэддин свои новые идеи увязывает с таковыми у Омара Хайяма. Эти факты свидетельствуют о понимании учёными этих стран своего места в истории науки.

Важными центрами научной жизни в среднеазиатских странах были города: Самарканд, Хорезм (Ургенч), Бухара, Мерв и др. Здесь с IX в. расцветает и математическая мысль, работают учёные, которые обогатили науку, а в ряде случаев утвердили свою славу в ней. Среди этих учёных были: математик Мухáммед ал-Хорезми (Мухáммед из Хорезма), астрономы ал-Фергани (Абуль из Ферганы), ферганцы же — астрономы ал-Тюрки и его сын Абдуль Хасан, ал-Сагани из окрестностей города Мерва, ал-Ходженди и ал-Джаухари с берегов Сыр-Дарьи, ал-Беруни из Хорезма и ибн-Сина из Бухары (IX—X вв.). К ним надо добавить Омара Хайяма (XI в.) и ал-Каши — директора обсерватории учёного самаркандского правителя Улугбека (XV в.).

Мухаммед ибн-Муса ал-Хорезми, родившийся во второй половине VIII в. и умерший между 830 и 840 гг., написал учебник арифметики в индийской позиционной системе счисления. В начале IX в. этот же Мухаммед ал-Хорезми написал учебник, ставший родоначальником европейских учебников алгебры и давший этой науке не только название, но и совершенно новый характер.

Евклид вопросы алгебры решает геометрически. Диофант, которого называют «отцом греческой алгебры», искусственными приёмами находит числа, удовлетворяющие заданным условиям, выражаемым уравнениями. Ал-Хорезми же пишет в предисловии к своей книге, что он «составил это небольшое сочинение из наиболее лёгкого и полезного в науке счисления и притом такого, что требуется постоянно людям в делах о наследовании, наследственных пошлинах, при разделах имущества, в судебных процессах, в торговле и во всех их деловых взаимоотношениях, случаях измерения земель, проведения каналов, в геометрических вычислениях и других предметах различного рода и сорта...».

Большая часть книги отведена решению практических задач, чего совершенно избегали греческие математики. Теоретическая часть книги проникнута пониманием того, что алгебра есть наука общего характера, решающая вопросы «различного рода и сорта» (общими методами,— добавляем мы). Это задачи практической арифметики.

Ал-Хорезми известен также своими астрономическими и географическими трудами (измерение длины меридиана).

Знаменитый философ, астроном и математик ал-Беруни (из Хорезма) родился в 973 г. Как философ он интересен тем, что в те отдалённые времена отстаивал права человеческого разума.


Улугбек. (Работа современного художника.)

Он пишет, что по поводу астрономических взглядов с ним «спорили некоторые люди, приписывающие божественной премудрости то, чего они не знают в науках. Они оправдывают своё невежество заявлением, что только аллах всемогущ и всеведущ».

Ал-Беруни не довольствуется тем, что та или иная астрономическая теория удобна для объяснения явлений. Одинаково удобно могут объяснять явления и несколько теорий. Учёный, по его мнению, должен ставить вопрос: которая из этих теорий истинная?

В замечательной «Книге о хордах» ал-Беруни сопоставляет разные способы доказательства отдельных предположений, имевшихся у более ранних учёных, и заявляет: «Я собрал всё это для тебя, читатель, и по своему обыкновению отнёс каждое доказательство к его автору, чтобы ты охватил их собственным оком и понял, что все они сходятся в одной точке, и чтобы ты сам решил, что нужно вынести отсюда для познания хорд». По содержанию книга относится к учению о более сложных вопросах геометрии и тригонометрии. В астрономических работах ал-Беруни предвосхищает современные способы составления точных карт (метод триангуляции).

Внук монгольского завоевателя Тамерлана Улугбек (1393—1449), сам крупный астроном, построил в Самарканде лучшую для того времени во всём мире обсерваторию, собрав в ней известнейших учёных для разработки астрономии и математических наук. Тригонометрия многим обязана деятельности этой группы учёных.

Первым директором этой обсерватории был Джемшид бен-Масуд эд-Дин ал-Каши, умерший около 1436 г. Вклад, сделанный им в математические науки, весьма большой. Его именем называли правило для вычисления суммы четвёртых степеней последовательности натуральных чисел от 1 до любого числа m:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + m^4 = \frac{1}{30}(6m^5 + 15m^4 + 10m^3 - m)^1.$$

[1] Это равенство, впрочем, содержится в трудах арабских учёных Египта около 1000-го года.

Ал-Каши усовершенствовал тригонометрические вычисления, дал правила приближённого решения уравнений высших степеней, способ определения расстояний небесных тел, изобрёл остроумный механический прибор для изучения положений планет. Часть этих открытий лишь несколькими столетиями позднее была вновь сделана европейскими учёными [20].

Ал-Каши в начале XV в. написал книгу «Поучение об окружности», на которую ссылается в своей книге (1427) «Ключ к искусству счёта». В «Поучении об окружности» он производит вычисления с поражающей нас точностью: если результаты, находимые им в шестидесятеричной системе счисления, перевести в десятичные дроби, то получаем 17 точных десятичных знаков после запятой. В своей книге ал-Каши находит приближённое отношение длины окружности к радиусу (число, которое мы обозначаем символом 2π), вычисляя для этого сторону правильного многоугольника, у которого 805 306 368 сторон. Ал-Каши получает для числа π 16 точных знаков после запятой.

В той же книге ал-Каши среди ряда других важных новых результатов впервые вводит в науку десятичные дроби, без которых немыслимы современные математика и техника. Это имело место за 175 лет до появления десятичных дробей в Европе.

Знаменитый поэт, философ, математик и астроном Омар Хайя́м родился около 1048 г., умер около 1122 г. В годы 1069—1074 он написал алгебру, посвящённую его самаркандскому другу. В этой книге автор даёт решение геометрическими методами уравнений третьей степени (содержащих x^3), что является наивысшим достижением алгебры средних веков. Алгебраические методы решения этих уравнений были найдены в Европе лишь в середине XVI столетия.

К геометрии относится изученная в наши дни работа Омара Хайяма «Ключ к трудным местам Евклида». В ней Хайям занимается вопросом о параллельных прямых и подходит к некоторым начальным понятиям того самого высокого построения геометрической мысли, которое было в первой половине XIX столетия создано гениальнейшим математиком всех времён Н. И. Лобачевским.

В 1079 г. Омар Хайям составляет новый очень точный календарь. Математические расчёты календаря Омара Хайяма были использованы для французского революционного календаря в самом конце XVIII в.

Приведение имён ал-Хорезми, ал-Беруни, Улугбека, ал-Каши и Омара Хайяма достаточно для характеристики того исключительно высокого уровня, которого достигли математические науки в среднеазиатских странах в средние века.

В вопросе перенесения индийской позиционной арифметики на запад — в арабские владения и в Европу — из среднеазиатских математиков особенно важные заслуги имеет упомянутый на первом месте в списке их Мухаммед ибн-Муса ал-Хорезми.

Омар Хайям. (Реставрированный портрет.)

Оригинал его «Арифметики в индийской нумерации» до сих пор не найден, но в 1857 г. был обнаружен и издан латинский перевод её, сделанный в XII в. под названием «Алхорезми об индийском числе». Перевод этот начинается словами: «Dixit Algorithmi,— сказал ал-Хорезми». Отсюда произошло очень широко употребляемое ныне в математике слово «алгорифм», означающее всякий порядок действий или правило для получения того или иного результата: алгорифм Евклида или последовательного деления, алгорифм решения уравнения и т. д. Это слово, употребляемое так часто в математике и имеющее в своём корне слово «Хорезм», напоминает нам о значении нашей Средней Азии в истории математической культуры человечества.

Отметим, что слово «логарифм» имеет совсем иное происхождение и его не следует связывать с Хорезмом и Средней Азией, хотя это делалось в трудах некоторых учёных.

Слово «алгорифм» в форме «алгоризм» часто (вслед за английским поэтом Чоусером с 1350 г.) употреблялось в качестве заглавия изложений индийского счисления в рукописях XII—XV вв. и в книгах XV—XVI вв.

Сказанного достаточно, чтобы видеть, какое большое место занимают среднеазиатские учёные в создании того, что западные историки называют «арабской математикой».

22. АБАК

В разных местах нашего изложения мы могли видеть, какую большую роль играли пальцы и счёт на них в возникновении абстрактного счёта. Пальцы являлись первым счётным прибором человека.

Для больших чисел этот счётный прибор оказался недостаточным. Его место занял более совершенный прибор **абак**, получивший у русских и восточных народов форму счётов. Прибор этот, сыграв большую роль в развитии нумерации и практических приёмов счёта, не потерял своего значения и в наши дни.

Европейские народы не получили абак непосредственно от римлян и греков, так как культурное наследие этих народов средневековой Европе осталось неизвестным. Как с математическими трудами греков, так и с абаком европейцы познакомились через арабов.

У арабов выработались два различных типа цифр.

Восточные арабы, начиная с конца VIII в., постепенно усваивали индийскую нумерацию и знак для обозначения отсутствующего разряда (нуль). Цифры их по форме отличаются от индийских, но это не имеет существенного значения, так как до изобретения книгопечатания (XV в.) вообще трудно говорить об определённой установившейся форме цифр. Восточноарабские цифры в IX в. перешли в Иран, в X—XI вв.— в Византию.

Цифры западных арабов, называемые цифрами гобар, отличались по форме от цифр восточных арабов. Дошедшие до нас памятники их индийскими не называют. По-видимому, они возникли в северо-западной Африке независимо от непосредственного влияния Индии. Возникновение и эволюция их связаны с абаком.

Слово «абак» (счётная доска) — греческое, и филологи производят его от древнееврейского слова «пыль», почему и цифры гобар называют пылевыми. Абаком называется всякий прибор, на котором отмечены места для отдельных разрядов употребляемой системы счисления, в частности десятичной. Абаком являются наши счёты, абаком будут вбитые в классную доску гвозди, на которые в начальных классах вешаются жетоны с числовыми знаками, равно как просто разграфлённые лист бумаги или доска. Возможно, что первоначально абаком служил столик, посыпанный песком или пылью, откуда могло произойти и название, соединяющее в себе названия столика и пыли.

По теории профессора И. Н. Веселовского, абак существовал уже у вавилонян, чем может быть объяснено позднее появление знака для отсутствующего разряда (нуля): он при пользовании абаком не был нужен.

Римляне пользовались столом или доской, разграфлёнными на колонны и с обозначением на верху колонн, идя справа налево, мест разрядов единиц, десятков, сотен и т. д. цифрами I, X, C, M. Число единиц любого разряда указывалось числом камешков, положенных в соответствующую колонку. Латинское слово

Рис. 36. Грек-абакист. (Рисунок на античной вазе.)

calculi — камешки — лежит в корне слова «калькуляция»; calcul во многих языках означает математический анализ и счёт вообще.

Абак известен и у греков. Историк Геродот (V в. до н. э.) пишет о греках, «выкладывающих на абаке камешки»; греческий же историк II в. до н. э. Полибий говорит, что «царедворцы весьма сходны с камешками на абаке, ибо как камешек бывает по воле играющего то халкусом (мельчайшая медная монета), то талантом (крупнейшая монетная единица), так и царедворцы по воле владыки становятся блаженными или злополучными». Философ IV в. н. э. Ямблих («Жизнь Пифагора», гл. V, § 22) указывает, что Пифагор старался ввести в изучение арифметики и геометрии изложение на абаке. На одной вазе изображён греческий счётчик за абаком (см. приведённый рисунок), а в 1846 г. найден на греческом острове Саламине единственный известный в настоящее время громадный мраморный греческий абак размерами 105 *см* × 75 *см*.

Камешек для греческого абака назывался **псифос**; от этого слова было произведено название для счёта — **псифофория**, «раскладывание камешков» (заглавие книги об индийской арифметике Максима Плануда, умершего в 1310 г.: «Псифофория индийцев»). Специальный разбор относящихся к греческому абаку вопросов имеется в статье проф. М. Куторги «О счётах у древних греков» («Русский вестник», т. CII, стр. 901 и след.).

Абаком пользовались и народы Индии. Арабы знакомились с абаком у подчинённых ими народов. В заглавиях многих арабских руководств по арифметике фигурируют слова от корня «пыль».

У восточных арабов, как и у индийцев, абак был скоро вытеснен индийской нумерацией, но он крепко держался у западных арабов, захвативших в конце VIII в. и Испанию. В X в. здесь познакомился со счётом на абаке француз Герберт (940—1003), написавший об этом книгу (980—982) и пропагандировавший сам и через своих учеников употребление абака. Вместо камешков при счёте на абаке употреблялись и жетоны с начертанными на них числовыми знаками, или римскими цифрами, или особыми числовыми знаками — апексами. Апексы Герберта по форме близки к цифрам гобар западных арабов. Апексы Герберта и его 27-колонный абак, предмет удивления его современников, воспроизведены в реставрированном виде на рисунке.

Н. М. Бубнов, профессор истории Киевского университета, с 1908 г. в ряде книг защищал свою, отличную от распространённой, точку зрения на происхождение наших цифр и позиционной системы. Он считал, следуя Вёпке, что апексы Герберта не являются арабскими, а ведут своё начало от пифагорейцев, и что именно из них позднее образовались наши цифры. Он считал, что таким образом доказывается тезис об «арифметической самостоятельности европейской культуры» (заглавие книги Бубнова, 1908, немецкое издание 1914 г.). Подобные взгляды ранее частично высказывали и некоторые математики, например известный французский геометр и историк математики Шаль. С резкой критикой этих взглядов выступил В. В. Бобынин (Отчёт о XIII присуждении Академией наук премии Макария в 1909 г., Спб., 1911) [1].

Усилиями многочисленных учеников и последователей Герберта и благодаря его влиянию как папы римского (Сильвестра II, 999—1003) абак получил широкое распространение в Европе. Следы этого распространения удержались, между прочим, в различных языках. Английский глагол to checker, или chequer, означает графить—словом, от этого же корня называет-

[1] В настоящее время большинство историков математики принимают взгляд Н. М. Бубнова, исправив некоторые его детали.

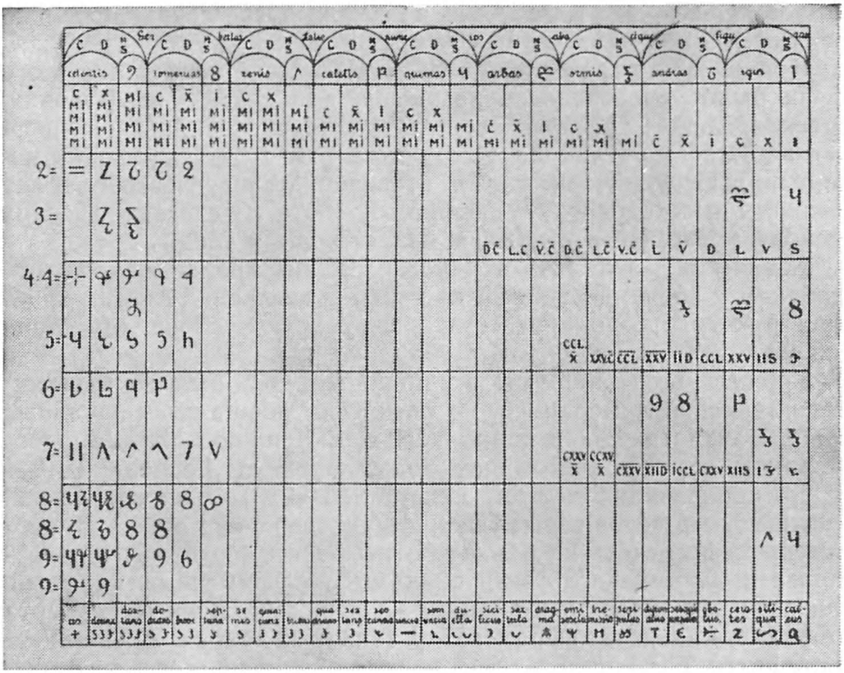


Рис. 37. 27-колонный абак Герберта.

Восстановлен проф. Н. М. Бубновым по различным рукописям. На левом краю таблицы дана эволюция знаков абака в современные цифры по гипотезе Н. М. Бубнова.

ся клетчатая материя, the cheque, или check — банковый чек, exchequer — казначейство. Последний термин происходит от того, что в банке расчёты велись на абаке, основа которого заключалась в разграфлённой доске. Английское государственное казначейство до последнего времени называлось Палатой шахматной доски — по клетчатому сукну, которым был покрыт стол заседаний. Клетчатая скатерть служила абаком при вычислениях. Возникшая в XII в. Палата шахматной доски была верховным финансовым управлением и высшим судом по финансовым вопросам до 1873 г. (БСЭ, изд. 2, т. 31, стр. 568).

По-итальянски banca — скамья и банк, bancarotta — сломанная скамья; отсюда слова «банк» и «банкрот». В немецком языке скамья и банк также обозначаются одним и тем же словом Bank.

Одинаковость названий столь различных понятий объясняется тем, что меняла, который был необходимой принадлежностью каждого перекрёстка улиц в те времена, когда чуть ли не каждый город имел свою особую денежную единицу, производил свои расчёты по обмену денег при помощи абака, награфлённого на конце скамейки, на которой он сам сидел. Когда денежные операции были перенесены в здания, то на всё новое учреждение было перенесено старое название скамейки с начерченным на ней абаком этим основным орудием менял.

Во французских деревнях до сих пор сохранились старые корчмы с настенными изображениями разграфлений, служивших в прежнее время абаком при расчётах.

Высказывалось мнение, что известное русское выражение «остался на бобах» сохранилось от времени широкого пользования абаком. Когда человек в игре, расчёты которой велись на абаке, проигрывал все свои деньги и у него оставались только бобы, которыми он пользовался при счёте на абаке вместо камешков, то он в буквальном смысле слова «оставался на бобах».

От абака некоторые исследователи ведут и происхождение знака нуль. Человек заметил, что нет надобности носить с собой разграфлённую доску для расчётов; достаточно отметить отсутствующий разряд числа пустой клеткой. Так, число три сотни и семь единиц можно без абака изобразить, как 3□7. Для удобства письма знак □ был превращён в кружок 0. На латинском языке среди названий нуля и есть rotula — кружок.

23. СЧЁТЫ

Счёты, столь распространённые у нас, являются одним из видов того же абака. Аналогичный прибор употребляли многие народы. Индийцы — брахманы — употребляли косточки на шнурке, которые они перебирали, перечисляя имена бога. От них произошли чётки христианских монахов, у которых такие же косточки на шнуре служили для счёта повторяемых молитв.

Русские счёты, по сведениям путешественника XVII в. Николая Витзена, вошедшим во многие руководства истории (в том числе в очень распространённую и авторитетную в прошлом «Историю государства Российского» Н. М. Карамзина), были якобы привезены в Россию из Азии. Привёз их Спиридон Строганов, крещёный мурза Золотой Орды, предок российского рода Строгановых при Димитрии Донском (XIV в.).

Митрополит Евгений, автор «Словарей русских писателей», которые оказали влияние на взгляды других авторов, приписывает ознакомление русских со счётами, привезёнными из Сибири, Аниките Строганову, умершему в 1750 г.

Уже одна такая противоречивость источников свидетельствует о сомнительности сообщаемых ими сведений.

Счёты, называемые суанпан, распространены на Востоке. Как видно из рисунка, суанпан имеет на каждой проволоке по 7 косточек — 5 по одну и 2 по другую сторону от продольной перегородки. Одна косточка верхней половины означает 5 косточек нижней. Известно, что опытный счётчик на суанпане выполняет сложные выкладки очень быстро.

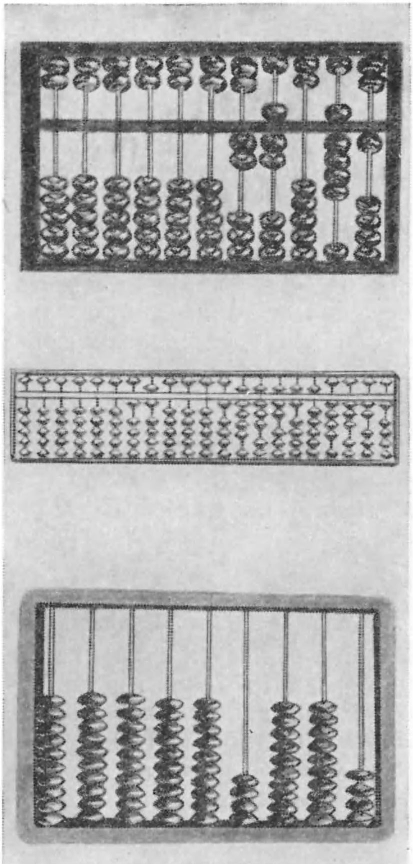


Рис. 38. Суанпан (верхний рисунок), японский соробан (средний рисунок), русские счёты (нижний рисунок).

Устройство японских счётов соробан отличается от суанпана тем, что в верхней половине имеется только одна косточка на каждой проволоке, так как две косточки в верхней половине составляют 10 единиц, которые откладываются одной косточкой на следующей проволоке. Так же можно было бы удалить и пятую косточку с каждой проволоки в нижней части соробана и десятую косточку с каждой проволоки русских счётов.

На некоторых старых изображениях русских счётов на каждой проволоке имеется не десять, а девять косточек. Некоторые авторы, писавшие о русских счётах, считали такие счёты с 9 косточками на каждой проволоке дефектными. Однако здесь мы имеем дело не с дефектом, а со счётами, в которых идея десятичной нумерации доведена до конца [21].

Из сказанного видно, что в суанпане и в соробане число 5 занимает особое место, чего нет в русских счётах, которые основаны в чистом виде на десятичной системе счисления. Суанпан и японские счёты, по существу, построены на пятеричной системе счисления, следы которой явно выступают и в римской нумерации:

шесть	—	VI	—	пять да один,
семь	—	VII	—	пять да два,
восемь	—	VIII	—	пять да три,
девять	—	VIIII	—	пять да четыре,
четыре	—	IV	—	без одного пять.

До XVI в. включительно западноевропейские народы и школа их пользовались римской нумерацией и способом счёта, соответствующим конструкции суанпана. Этот способ счисления назывался «счётом на линиях», знакомство с которым дано в следующем разделе.

Русские счёты никаких следов пятеричного счисления не содержат, и производить их от суанпана или соробана нет никаких оснований: они являются изобретением русского народа и по справедливости называются русскими счётами.

Западноевропейский быт не знал употребления счётов, и ловкость пользования ими у русских много раз вызывала удивление иностранцев.

Школьные счёты как пособие при преподавании арифметики попали в Западную Европу в 20-х годах XIX в. следующим образом. Во время наполеоновского похода в Россию в 1812 г. в сражении под Красным (Смоленской губернии), за которое фельдмаршал Кутузов получил титул князя Смоленского, попал в плен поручик сапёрного батальона Жан Виктор Понселэ (1788—1867) [1]. Партия пленных французов была отправлена в Саратов. Среди немногих французов, дошедших до места назначения после четырёхмесячного перехода, был и Понселэ. Уезжая на родину, он увёз туда и русские счёты. Под названием «буйе» они вошли в употребление в школах.

Совершенно непонятно, почему классные счёты иногда назывались и называются «шведскими».

Американский историк математики Д. Е. Смит в специальном исследовании о счётных приборах, изданном в 1921 г., пишет, что русские счёты пришли в Россию через армян от турок и что этот прибор у турок якобы называется «кулба», а у армян — «хораб». Однако ни тот, ни другой язык подобных слов, соответствующих понятию «счёты», не знает: в турецком языке есть слово «хораб», в армянском — слово «кулба», и оба слова означают одно и то же, именно — чулки.

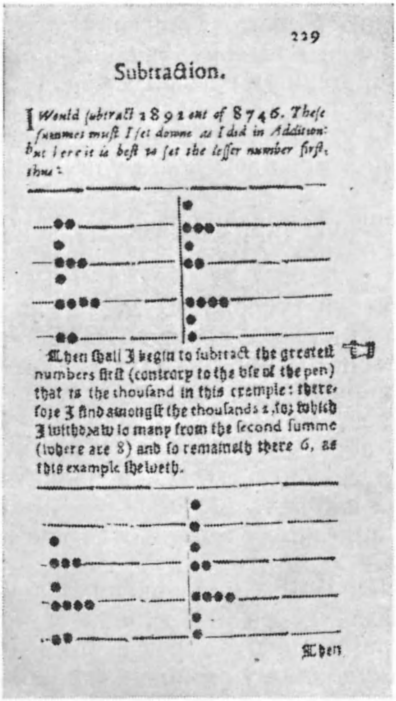
История русских счётов очень подробно изложена в 5-м выпуске «Историко-математических исследований» (М., 1952) в работе И. Г. Спасского «Происхождение и история русских счётов».

24. СЧЁТ НА ЛИНИЯХ

В средние века в Европе выработался способ вычисления, который соответствует идее суанпана и соробана, только без материального прибора.

Вычислитель имеет перед собой лист бумаги, на котором проведены на равных расстояниях прямые линии, параллельные краю листа, ближайшему к вычислителю. Имеются кружочки (жетоны) из картона или какого-нибудь другого материала. На первой, ближайшей к вычислителю линии кружочек обозначает единицу, на второй линии — десяток, на третьей — сотню и т. д., как на обычных счётах. Кружочек, помещённый в первом промежутке между параллельными, обозначает 5, помещённый во втором промежутке — 50, помещённый в третьем промежутке —

[1] *Понселэ* — впоследствии знаменитый механик и геометр.



229

Subtraction.

I Would subtract 2892 out of 8746. These summes must I set downe as I did in Addition: but here it is best to set the lesser number first, thus:

Then shall I begin to subtract the greatest numbers first (contrary to the use of the pen) that is the thousand in this example: therefore I find amongst the thousands 2, for which I withdraw so many from the second summe (where are 8) and so remaineth there 6, as this example sheweth.

Then

Рис. 39. Фотоснимок со страницы книги Рикорда.

500 и т. д. Очевидно, что при производстве вычислений на таком «приборе» кружочков нужно меньше, чем шариков на обычных или на счётах суанпан и соробан, так как и в последних число косточек не было доведено до возможного минимума.

Вот страница из книги Р. Рикорда (1510—1558), которая была одним из первых учебников арифметики на английском языке. Книга называлась «Фундамент искусств» и выдержала очень много изданий между 1542 и 1699 гг. Страница посвящена вычитанию.

В верхней части отложены числа 2892 и 8746.

«Нужно вычесть 2892 из 8746. Эти числа нужно отложить (на линиях) так же, как я делал при сложении, только здесь лучше сначала отложить меньшее число (верхняя часть рисунка). Теперь я начинаю вычитание с высших разрядов (в противоположность обыкновению при вычислении пером), т. е. с тысяч в данном случае: так, я вижу тысяч две, которые я отнимаю от второго числа (где их 8) и остаётся там 6, как показано в последующем».

На нижней части страницы изображены числа 892 и 6746, т. е. вычитаемое и уменьшаемое, уменьшенные оба на 2000.

В дальнейшем таким же образом вычитаются по порядку 800, 90 и 2 с повторением чертежей для каждого отдельного вычитания.

Счёт на линиях возник в XIII в. и распространился во всех странах Западной Европы. Руководства для такого счёта продолжали появляться ещё долго после того, как уже широко начал входить в употребление счёт пером, т. е. наш обычный счёт. Учебники арифметики XVI в. часто противопоставляют или сопоставляют оба способа производства арифметических действий и в тексте, и в иллюстрациях. На нашем рисунке воспроизведено такое сопоставление, напечатанное в энциклопедии наук начала XVI в. Григория Рейша (1503).

В середине стоит муза арифметики, на ленте надпись: типы арифметики. Слева за столом сидит Боэций (475—526), послед-

Рис. 40. Счисление при помощи пера (на линиях) и счисление жетонами. Рисунок из книги Григория Рейша «Философская жемчужина» (1503).

ний представитель римской культуры, писатель и государственный деятель, чьи книги в средние века служили учебниками, и производит вычисление «пером». Справа за столом изображён Пифагор, производящий вычисления «на линиях».

Изображение обоих этих исторических лиц представителями двух направлений в арифметике столь же мало обосновано, сколь мало портретные черты имеют основание считаться отвечающими действительности.

Из подобных руководств, излагающих оба способа обучения арифметике и в большинстве случаев снабжённых соответственными иллюстрациями, многие весьма известны в истории математического образования. Таковы, например, книги Адама Риза (1522), Геммы Фризиуса (1568), Якоба Кёбеля (1514) и др. Все они выходили в очень большом числе изданий с начала XVI в.

и назывались «Арифметика на линиях и пером» или «Арифметика на линиях и на цифрах».

Из сказанного ясно, что счёт на суанпане или соробане имеет ту же основу, что и «счёт на линиях». Пользование пятеричной системой счисления предшествовало переходу на десятичное счисление у всех народов. Суанпан и соробан могут поэтому считаться лишь очень далёкими предками русских счётов.

Сведения о том, что и русский народ когда-то в прошлом имел пятеричное счисление и пользовался соответствующими этой системе счисления счётными приборами, можно найти в указанной выше статье И. Г. Спасского [1].

25. ПРОИСХОЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Нуль. Индийцы называли знак, обозначающий отсутствие какого-либо разряда в числе, словом «сунья», что значит пустой (разряд, место).

Арабы перевели это слово по смыслу и получили слово «сифр». Леонардо Пизанский (1228) употребил для передачи арабского термина «сифр» слово zephirum (латинское слово zephyrus — зефир означало западный ветер), а одновременно с ним другой главный поборник индийской нумерации в Европе, Иордан Неморарий (1237), употребляет арабскую форму cifra. Из последнего слова во Франции произошло слово «шифр» — chiffre (Шюке, 1484 г.), а из zephirum в Италии zero, подобно тому как из слова libra (фунт) образовалось lira — лира (название денежной единицы Италии).

Так как словом chiffre позднее во Франции стали обозначать знаки 1, 2, ..., 9, то для обозначения нуля была принята форма zero. Наименование «цифра» в смысле нуля употреблялось долго и после того, как слово «цифра» получило более широкое значение. Так, например, Эйлер употребляет ещё в 1783 г. вместо «нуль» термин «цифра»; так поступает Гаусс в 1799 г., а в Англии такое словоупотребление имеет место до сих пор как в математической, так и в общей литературе. В романе Теккерея «Эсмонд» (1852) читаем: «Лорд был в своём доме чуть более, чем цифра» (т. е. нуль). В переводе романа Теккерея на русский язык в 1946 г. это место оригинала звучит так: «Его милость значил в собственном доме немногим более пешки». Переводчик того же романа в 1894 г. пишет более точно: «Его сиятельство значил в доме немногим более нуля». В обоих случаях смысл оригинала не нарушен.

Этого нельзя сказать про перевод «Зимней сказки» Шекспира. В последних изданиях (Шекспир, Полн. собр. соч., т. VIII,

---

[1] «Счёт костьми» и «дощаной счёт».

под ред. А. А. Смирнова, Гослитиздат, 1949, стр. 176 и в отдельном издании издательства «Искусство», 1941) Поликсен (I действие, II сцена) говорит:

И вот, как цифру ставя
На видном месте, умножаю этим
Одним «благодарю» я много тысяч
Стоящих перед ней.

Незнакомому с историей арифметики остаётся только удивляться тому, что Шекспир написал такой набор слов, в котором трудно найти какой-нибудь смысл. Однако этот бессмысленный набор слов принадлежит не Шекспиру, а переводчику. Последний понял английский термин «цифра» в смысле нашего словоупотребления — как «цифра», а не как «нуль», и, не поняв ещё кой-чего в английском тексте, исказил мысль Шекспира, которая гласит: «Как приставление нуля справа к числу увеличивает это число во много раз, так и я своим последним «благодарю» хочу увеличить моё к вам выражение благодарности».

В связи с подобными казусами нельзя не вспомнить и высказывания А. М. Горького: «Очень советую филологиею не играть, это штучка хрупкая». Не менее осторожного обращения требуют математические термины [22].

Индийцы вначале обозначали нуль точкой. В этой связи нужно указать на факт, ставший известным в самое последнее время. В Вене хранится рукописная арифметика XV в., приобретённая в Константинополе (Стамбуле), в этом «золотом дне» древнегреческих памятников, в которой употребляются греческие числовые знаки вместе с обозначением нуля точкой [1].

В латинских переводах арабских трактатов XII в. знак нуля — 0 называется кружком — circulus. В оказавшем очень большое влияние на преподавание арифметики в западных странах руководстве Сакробоско (Holywood, умер в 1256 г.), написанном в 1250 г. и перепечатывавшемся в очень многих странах, нуль называется «theta vel theca vel circulus vel cifra vel figura nihili» — тэта, или тека, или кружок, или цифра, или знак ничего.

Термин nulla figura — никакой знак — появляется в рукописных латинских переводах и обработках арабских трудов в XII в. Термин nulla имеется в рукописи Шюке 1484 г. и в первой печатной так называемой (по месту издания) Тревизской арифметике 1478 г.

С начала XVI в. в немецких руководствах слово «цифра» получает значение современное, слово «нуль» входит в повсеместное употребление в Германии и в других странах, сначала как слово чужое и в латинской грамматической форме, постепенно принимая форму, свойственную данному национальному языку.

---

[1] «Zentralblatt für Mathematik», апрель, 1957, сообщение чешского историка математики Г. Феттера.

Л. Магницкий в своей «Арифметике» называет знак 0 «цифрой или ничем» (первая страница текста); на второй странице в таблице, в которой каждой цифре даётся название, 0 называется «низачто». В конце XVIII в. во втором русском издании «Сокращения первых оснований математики» X. Вольфа (1791) нуль ещё называется цифрой. В математических рукописях XVII в., употребляющих индийские цифры, 0 называется «оном» вследствие сходства с буквой *о*.

Цифра. Как видно из сказанного, это слово первоначально означало нуль и получило значение более общее, когда люди осознали, что все преимущества позиционной нумерации перед другими нумерациями проистекают от наличия нуля. Уже в XIV в. словом «цифра» стали называть на народном языке все новые числовые знаки. Против этого восставали учёные авторы. Так, в рукописи 1356 г. говорится: «Хотя только десятый знак — 0 — должен называться цифрой, а остальные фигурами, но народ в своей необразованности называет все 10 знаков цифрами».

Во Франции в XV в. слово chiffre получает ещё новый оттенок, именно наше современное значение шифра, тайнописи. В рукописи 1485 г. говорится: «Знаки эти называются цифрами, так как это есть способ письма, отличный от обычного» (римского). Новый смысл слова chiffre во французском языке и заставил ввести для обозначения нуля итальянскую форму — слово zero.

Читая поэму Пушкина «Полтава», не один, вероятно, читатель остановился в недоумении на строках 378-й и следующей, которые звучат так:

Во тьме ночной они, как воры,
Слагают цифр универсалов...

«Универсалами» назывались на украинском языке тех дней гетманские указы. Слово «цифр» здесь употребляется в смысле шифр, тайнопись.

В Германии слово «цифра» в новом, расширенном смысле появилось также сначала в народном языке. Учебник 1514 г. пишет о «значащих числовых знаках (figurae), которые тёмная чернь называет цифрами». В другом руководстве 1514 г. новые (индийские) цифры называются zyfferzale (цифирные числа), в отличие от обычных римских, называемых немецкими Teutschzale (!). То же повторяется в изданиях 1537 и 1543 гг.

26. ИНДИЙСКИЕ ЦИФРЫ У ЗАПАДНОЕВРОПЕЙСКИХ НАРОДОВ

Мы видели в предыдущих разделах книги, что у арабов образовались две системы цифр: у западных арабов, культурным центром которых был испанский город Кордова, цифры гобар или пылевые цифры; у восточных арабов, столицей которых яв-

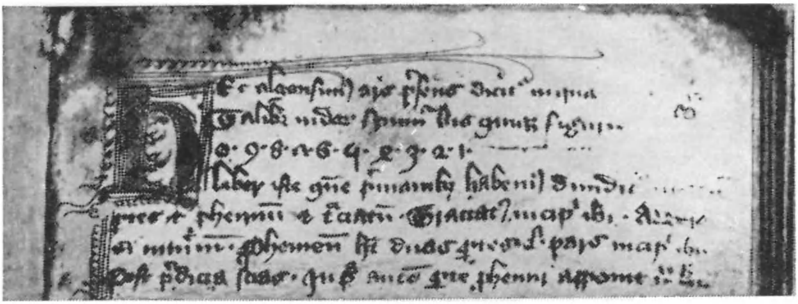


Рис. 41. «Песнь об алгоризме» Александра де Вилла Деи, XII—XIII вв.

лялся город Багдад на реке Тигре (в нынешнем Ираке, вблизи древнего Вавилона), развилась своя цифровая система, близкая к индийской.

Цифровая система западных арабов через университеты и обширные библиотеки в Кордове, Толедо и других испанских городах оказала на развитие арифметической культуры у западноевропейских народов больше влияния, чем восточноарабская нумерация. Западноарабская система письменной нумерации, опиравшаяся на употребление абака, долго обходилась без знака 0. По всей вероятности, от западноарабских цифр возникли апексы Герберта, названия которых: 1 — igin, 2 — andras, 3 — ormis и т. д. — не нашли до сих пор удовлетворительного разъяснения. Немецкий востоковед Руска считает их результатом многократного искажения арабских корней, а профессор Н. М. Бубнов — происшедшими из языка некоего урало-алтайского народа, пришедшего в глубоком прошлом через Кавказ в междуречье Евфрата и Тигра.

В мусульманские университеты Испании проникали сначала единицы, а с XII в. всё большее число студентов евреев и христиан. Они знакомились с существовавшими там арабскими руководствами и составляли по ним и под их влиянием свои, а также переводили арабские руководства на латинский язык.

Крупнейшим переводчиком в XII в. был Герард из Кремоны (Италия). Он 50 лет своей жизни посвятил переводам с арабского на латинский трудов по математике и астрономии, среди которых была алгебра ал-Хорезми. Другой перевод той же книги одновременно был сделан Робертом из Честера (Англия). В то же время были сделаны два перевода на латинский язык арифметики ал-Хорезми столь же известными в истории европейской математики переводчиками Аделардом из Бата (Англия) и Иоанном Луна, или Иоанном Севельским (Испания).

Из этих переводов и из переведённых на латинский язык других арабских руководств европейские учёные круги, соприкасав-

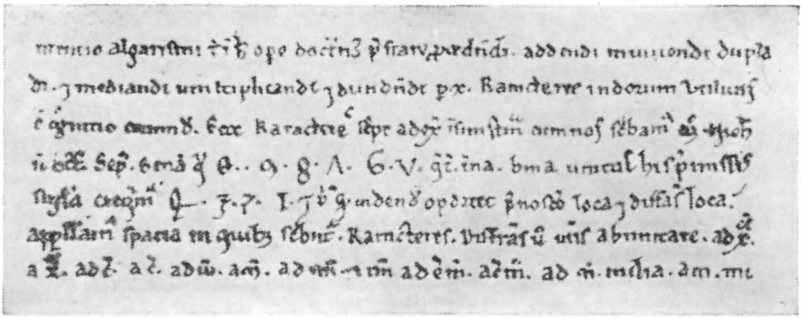


Рис. 42. Латинский алгоризм XII в.: в четвертой строке индийские цифры.

шиеся с мусульманскими научными центрами в Испании, знакомились с индийской математикой.

В XIII в. появилось несколько оригинальных изложений индийской арифметики авторами, которые подготовили почву для её победоносного шествия по всем странам Западной Европы. Упомянутый уже англичанин Джон Холивууд, или Халифакс, известный под именем Сакробоско, написал руководство, которое уже в рукописи имело громадное распространение. Француз Александр де Вилла Деи написал в латинских стихах «Песнь об алгоризме». Итальянский купец Леонардо из Пизы (Фибоначчи) в начале XIII в. составил огромный трактат, хотя и названный «Книга абака», но излагающий, в сущности, индийско-арабскую арифметику, в преимуществах которой он убедился на практике во время своих коммерческих поездок в арабские страны. Книга эта не получила того распространения, которого она заслуживала. Напечатана она была лишь в 1852 г. Среди учёных в церковных кругах индийскую арифметику распространял профессор Парижского университета и генерал одного из монашеских орденов Иордан Неморарий (XIII в.).

В XIII и XIV вв. в европейских университетах учились уже сотни студентов, которым на интернациональном языке учёных — латинском — профессора строка за строкой диктовали и объясняли руководство по новой арифметике, в большинстве случаев так называемый популярный, или народный алгоризм Сакробоско. Профессор Парижского университета Пётр Датский написал в 1292 г. к книге Сакробоско подробные комментарии, столь же усердно переписывавшиеся студентами и любителями знаний, как и само руководство. В печатном издании, которое появилось несколькими столетиями позже, к 200 страницам текста дано 800 страниц комментариев. Это даёт представление о том, какие трудности стояли на пути изучения и усвоения новой арифметики в Европе.

Латинский язык оставался до XVIII в. языком преподавания в высших школах Европы, малочисленных и обслуживавших лишь верхи общества. Но в XIV в. появляются изложения новой арифметики и на народных языках: перевод руководства Сакробоско на исландском языке (это вообще первый случай перевода научной книги на народный язык), французское изложение «Песни об алгоризме» Александра де Вилла Деи, краткое изложение индийской арифметики на английском языке. В XV в. число таких попыток значительно возрастает.

Печатные руководства новой арифметики появляются в конце XV в.: немецкий алгоризм в 1475 г., Тревизская арифметика в 1478 г., первая печатная индийско-арабская арифметика на испанском языке в 1482 г. Последующие годы дают значительный рост изданий.

Итальянские купеческие круги быстро оценили преимущества индийской нумерации. Пользование ею, непонятною для представителей власти, было запрещено во Флоренции в 1299 г. Хотя после этого бухгалтерские книги велись довольно долгое время в римской нумерации, однако черновые расчёты и проверки уже тогда выполнялись индийскими цифрами.

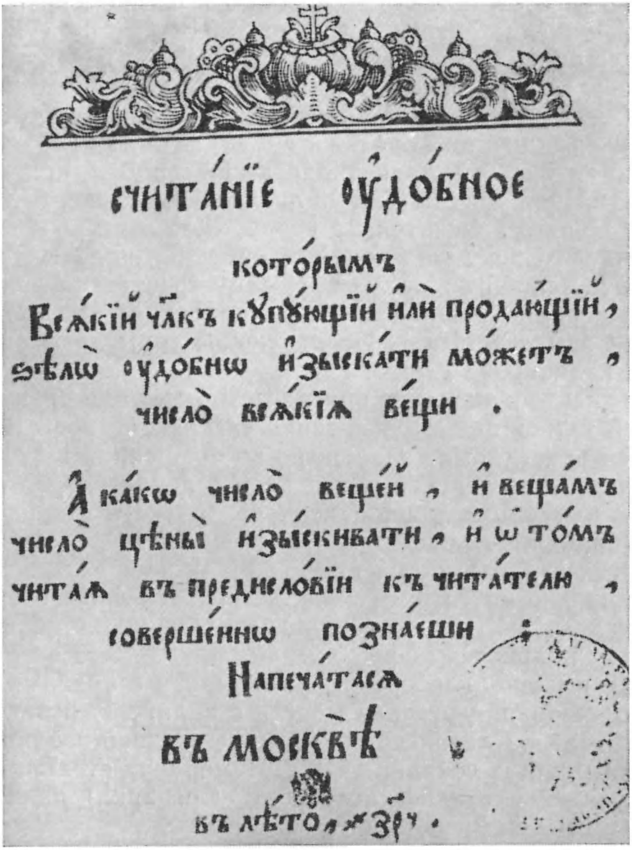
В других странах индийские цифры весьма медленно проникают в широкие круги населения, встречаясь лишь в отдельных документах XII—XIII вв. (единичные случаи — в конце IX в.). На монетах индийские цифры впервые появляются в 976 г. в Испании, где имелись непосредственные связи с арабами.

Наиболее ранняя русская монета с индийскими цифрами относится к 1654 г. Славянские цифры в последний раз появляются на медных монетах чеканки 1718 г. Нумерация страниц большой книги (сочинения итальянского поэта Петрарки) дана впервые индийскими цифрами в 1471 г.

С начала XIII в. в Западной Европе существовали рядом две системы изложения арифметики: одна — при помощи абака, другая — посредством индийской нумерации или алгоризма. Сторонники первого способа — **абакисты** были представителями старой, уходящей системы, приверженцы второго способа — **алгорифмики** — представителями уже народившейся новой арифметики. Флагом для первого течения был Герберт, для нового — Леонардо Пизанский (Фибоначчи).

Сосуществование двух систем не всегда было «мирным», происходили, как во всех областях жизни, жаркие бои между приверженцами старого и нового. Победило новое. Победа была обеспечена трудами арабских и арабоязычных авторов. Среди последних, как мы уже указывали, ведущее место занимали среднеазиатские учёные. Их труды читали не только в переводах: из биографий европейских учёных средних веков и нового времени мы знаем, что многие из них владели арабским языком.

Однако в гораздо большей мере победу алгорифмиков — сторонников индийской арифметики — обеспечила практика.



Считанїе оудобное
которымъ
Всякїй человѣкъ купующїй или продающїй,
зѣло оудобно изыскати можетъ,
число всякїя вещи.
А како число вещей, и вещамъ
число цѣны изыскивати, и о томъ
читай въ предисловїи къ читателю,
совершенно познаеши.
Напечатася
въ Москвѣ
въ лѣто, ҂зрч.

Рис. 43. Заглавный лист первой русской печатной математической книги.

В итальянских городах, а затем и в других европейских странах развилась оживлённая торговля со странами Востока. Купеческие круги в этих городах стали задавать тон жизни. Купцы оценили преимущества той арифметики, которой пользовались арабские купцы. Каждый торговый город заводит своего «учителя арифметики» (Rechenmeister), который обучает работников торговых предприятий индийско-арабской арифметике. Это-то рехенмейстеры — мастера счисления — и обеспечили победу новой арифметике и её основе — позиционной системе счисления.

Нет достаточных сведений о существовании «мастеров счисления» в русских городах, но «цифирные школы» в начале XVIII в. имелись во многих из них. Известно, что такие «мастера счисления» существовали в городах теперешних прибалтийских советских республик — в Эстонии и Латвии. В Эстонии, например, были свои рехенмейстеры в Таллине, Нарве, Пярну, Кингисеппе, Тарту. Сохранились составленные ими руководства арифметики, представляющие интерес как для истории арифметики, так и для социальной истории этих стран.

27. ИНДИЙСКИЕ ЦИФРЫ В РОССИИ

Первой русской печатной книгой математического содержания было «Считание удобное, которым всякий человек купующий или продающий, зело удобно изыскати может, число всякие вещи». Напечатана она была в московской типографии в 1682 г. и представляет 50 страниц таблиц умножения, идущих от 1×1 до 100×100. В ней употребляется ещё славянская нумерация. Второе её издание 1714 г. под заглавием «Книга считания удобного ко употреблению всякому хотящему без труда познати цену, или меру какия вещи» (Петербург) напечатано уже гражданским шрифтом и индийскими цифрами.

То обстоятельство, что в счётной таблице, предназначенной служить пособием для простейших житейских расчётов, автор в 1682 г. употребляет церковнославянские цифры, свидетельствует о том, что в конце XVII в. индийские цифры ещё не успели получить достаточного распространения среди широких слоёв населения. В старинных русских печатных книгах эти цифры только изредка употребляются для нумерации страниц и гравюр.

Первой книгой, вышедшей из русской типографии с такой нумерацией страниц, была, по-видимому, отпечатанная в 1638 г. в типографии Виленского братства в местечке Евью (близ г. Вильнюса) псалтырь. После этого начинают пользоваться индийскими цифрами киевская и львовская типографии, отмечая ими годы издания или годы вырезания гравюр.

В 1647 г. по указу царя Алексея Михайловича в Москве был напечатан в 1200 экземплярах первый русский воинский устав под названием: «Учение и хитрость ратного строения пехотных людей». В этой книге во многих местах в тексте, а на рисунках повсюду употребляются индийские цифры, называемые «цифирными числами». Нумерация листов книги, глав и листов чертежей славянская. Отметим попутно, что «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки», в котором много математических сведений, был составлен в 1607 и 1621 гг., но напечатан лишь в 1775 г. (оригинал до нас не дошёл).

Ошибочным является мнение, высказанное многими авторами [1], что индийские цифры распространились у нас только через печатные книги с начала XVIII в. («Книга морского плавания», 1701, «Арифметика» Магницкого, 1703).

Рукописи математического содержания XVII в. содержат ин-

---

[1] Тредьяковский, автор словарей русских писателей, митрополит Евгений, Сопиков, Берх.

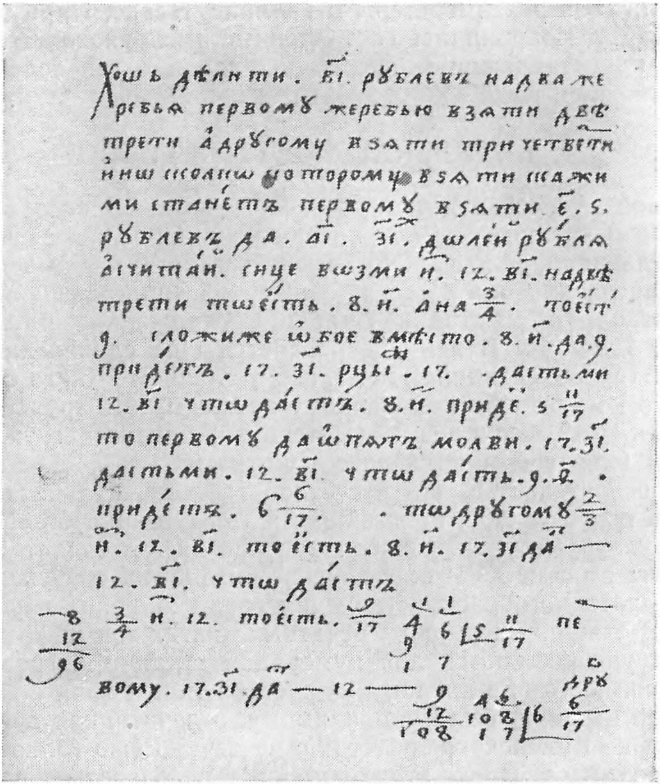


Рис. 44. Индийские цифры в русских рукописях XVII в.

дийские цифры, сначала сопровождаемые славянскими, а позднее и без этого. Характерно, что сопровождение индийских цифр славянскими даётся только в тексте, вычисления же делаются только одними индийскими цифрами, как бы подчёркивая этим их превосходство при выполнении вычислений.

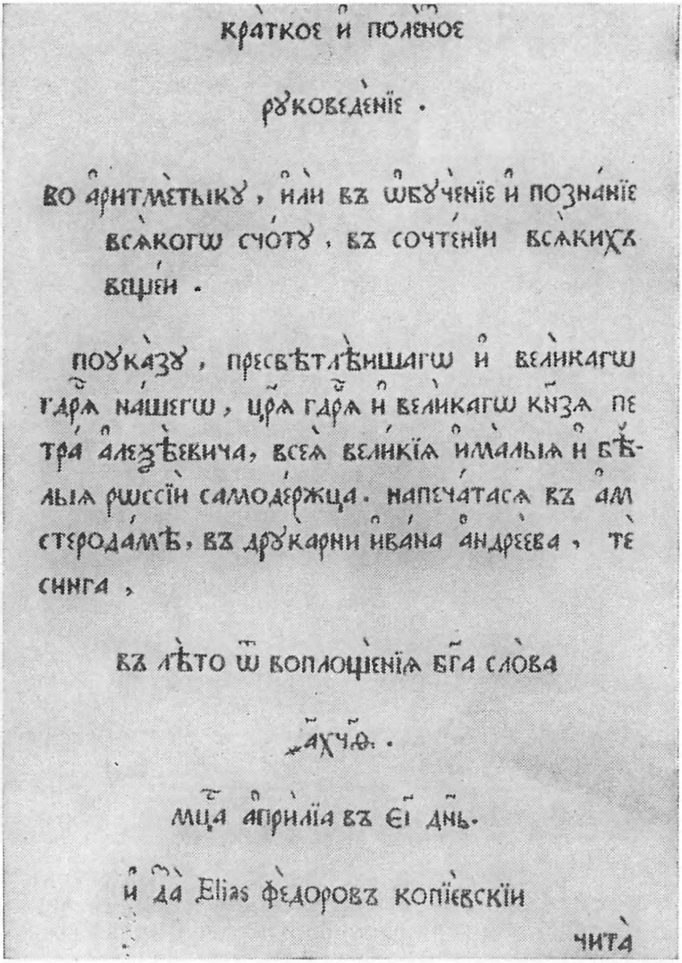
Славяно-русские книги, печатающиеся за рубежом, с самого начала XVII в. содержали индийские цифры. Так, в 1611 г. в Венеции были напечатаны две книги духовного содержания на славяно-русском языке, нумерация страниц в которых была дана индийскими цифрами. В некотором количестве эти зарубежные книги попадали и в Россию, так как русское духовенство XVII в. нередко пополнялось выходцами из славянских стран и Греции.

В конце XVII в. индийские цифры употребляются в изданных в Москве книгах: «История или действие евангельския притчи о блудном сыне бываемое», «Букварь словено-российских письмен Кариона Истомина». Оба эти издания являются не ти-

Рис. 45. Букварь Кариона Истомина (1692).

пографскими в полном смысле слова изданиями, так как текст их не набирался литерами, а вырезался на медных досках. На рисунке приведён снимок из «Азбуки» Истомина, содержащий изображение индийских цифр.

В 1699 г. в Амстердаме в типографии, созданной тамошним купцом Яном Тессингом по предложению Петра I для печатания полезных России книг, исключая церковных, была напечатана первая учебная книга на русском языке, содержавшая самые первоначальные сведения по счислению. Она вышла под названием «Краткое и полезное руководение во аритметыку, или во обучение и познание всякого счёту в сочтении всяких вещей». Книга эта составлена проживавшим в Амстердаме белорусом (или украинцем) Ильёй Фёдоровичем Копиевичем, или Копиевским. В книге употребляются индийские цифры, но она никакого влияния на распространение их в России не имела, так как



краткое и поленое
руковедение.
во аритметыку, или въ обучение и познание
всякого счоту, въ сочтении всяких
вещей.
поуказу, пресветлейшаго и великаго
гдря нашего, цря гдря и великаго кнзя Пе
тра Алеѯеевича, всея великия и малыя и бе
лыя россии самодержца. напечатася въ ам
стеродаме, въ друкарни Ивана Андреева, те
синга,
въ лето от воплощения бга слова
,ахчд.
мца априлия въ еі днь.
и да Elias федоровъ копиевскии
чита

Рис. 46. Титульный лист первой печатной на русском языке арифметики.

не получила распространения. Книга была заказана Копиевскому частными лицами — архангельскими купцами и заказчиков не удовлетворила. Они отказались её принять. Автор несколько раз обращался к Петру I относительно своих претензий к заказчикам, но удовлетворения не получил. После разных приключений Копиевский попал в Россию, где умер не позднее 1715 г., состоя в Москве переводчиком Посольского приказа (так называлось ведомство иностранных дел России в то время [23]).

Насколько незначительно было распространение индийских цифр среди населения России в начале XVIII в., видно из того,

ЮРНАЛЪ

или

ПОДЕННАЯ РОСПИСЬ,

Что въ нимошедшую осаду подъ крѣпостію Нотебургомъ чинилось.

Сентября съ 25 го числа въ 1702 году

Въ 26 день Сентября въ субботу о 12 ти часахъ, чрезъ посылку отъ войска, которое стояло отъ города въ 20 миляхъ, четыреста человѣкъ преображенскихъ солдатъ безъ всякой утраты шанцы начали, и постъ или мѣсто заняли, и тоеже ночи подошли два неприятельския судна для досмотру, какія гости въ ихъ сосѣдство пришли, но понеже по нихъ наша мушкетерія жестоко стрѣляла, и убила неприятельскаго бомбардира и 5 человѣкъ солдатъ, отъ чего принуждены они равной ходъ воспріять, потомъ до свѣту пришли два баталиона преображенскаго и семеновскаго полковъ.

А Въ

Рис. 47. Первая страница «Юрнала» (журнала) об осаде Нотебурга.

что одна половина тиража (1000 экземпляров) «Юрнала» об осаде Нотебурга, изданного в Москве в декабре 1702 г., была напечатана «с цифирными числами», а другая половина — «с русскими», о чём было сказано в официальном документе об этом издании [1].

«Арифметика» Магницкого (1703) напечатана славянским шрифтом, но с индийскими цифрами. Однако, подражая более ранним изданиям на русском языке, год издания и нумерация листов даны в славянской нумерации.

Впрочем, на второй странице текста в конце таблицы стоит дата: Лета господня 1701 (очевидно, дата писания начала книги). О цифрах Магницкий говорит в «Пределении первом»:

«Нумерацио, или счисление.

Что есть нумерацио; [24]

Нумерацио есть счисление еже совершенно вся числа речию

[1] *Нотебург* — крепость на Неве при выходе её из Ладожского озера — древнерусский Орешек.

Вѣдомости.
На москвѣ вновь нынѣ пушекъ мѣдныхъ гоубицъ и мартиршвъ вылито у҃.
Тѣ пушки ядромъ по к҃д. по и҃і. и по в҃і фунтовъ. гоубицы бомбомъ пудовые и полупудовые. мартиры бомбомъ девяти трехъ и двѹ пудовые и мѣнше. И еще многѡ формъ готовыхъ.

Рис. 48. «Ведомости», первая газета на русском языке, 1703 г

именовати, яже в десяти знаменованиях, или изображениях содержатся, и изображаются сице:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

из них же девять назнаменовательны суть: последнее же 0 (еже-цифрою, или ничем именуется), егда убо едино стоит, тогда само о себе ничтоже значит. Егда же коему оных знаменований приложено будет, тогда умножает в десятеро, якоже предложено есть ниже сего».

Перевод:

Нумерация есть счисление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Из них девять значащих, последняя же 0 (которая цифрою или ничем именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей (цифре), то увеличивает (обозначаемое ею число) в десять раз, как будет показано в дальнейшем.

28. ФОРМА НАШИХ ЦИФР

Об установившейся стабильной форме цифр может быть речь только со времени существования книгопечатания в Европе, с середины XV в [1]. Из помещённых в книге таблиц можно видеть, что

---

[1] Крупный советский востоковед акад. В. В. Бартольд указывает, что изобретение металлических литер — самый важный шаг в возникновении книгопечатания — было сделано корейцами, от которых это искусство перешло к другим азиатским народам.

В Европе искусство изготовления бумаги вошло в употребление лишь в XIII в., после того как во время крестовых походов европейцы познакомились с производством бумаги в Персии.

Арифметика практика

или деятелная.

Что есть арифметика?

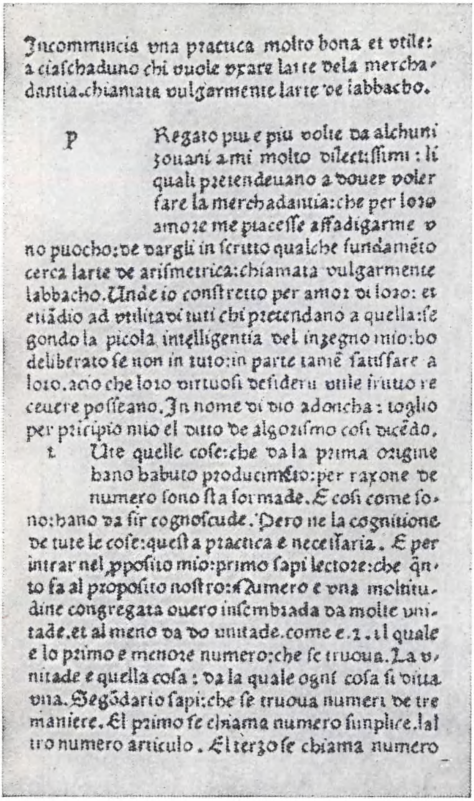
Арифметика или числителница, есть художество честное, независтное, и всем удобопонятное, многополезнейшее, и многохвалнейшее, от древнейших же и новейших, в разная времена явлшихся изряднейших арифметиков изобретенное и изложенное.

Коликогуба есть арифметика практика? Есть сугуба.

1 Арифметика политика, или гражданская.

2 Арифметика логистика, не ко гражданству токмо, но и к движению небесных кругов принадлежащая.

Первая страница текста «Арифметики» Л. Магницкого.



Incommincia vna pratica molto bona et vtile:
a ciascaduno chi vuole vxare larte dela mercha-
dantia.chiamata vulgarmente larte de labbacho.

P Regato piu e piu volte da alchuni
zouani a mi molto dilectissimi : li
quali pretendeuano a douer voler
fare la merchadantia: che per loro
amore me piacesse affadigarme v
no puocho: de dargli in scritto qualche fundaméto
cerca larte de arismetrica: chiamata vulgarmente
labbacho. Unde io constretto per amor di loro: et
etiãdio ad vtilita di tuti chi pretendano a quella: se
gondo la picola intelligentia del inzegno mio: ho
deliberato se non in tuto: in parte tamẽ satisfare a
loro. acio che loro virtuosi desiderii vtile frutto re
ceuere possano. In nome di dio adoncha: toglio
per principio mio el ditto de algorismo cosi dicẽdo.
t Ute quelle cose: che da la prima origine
hano habuto producimẽto: per raxone de
numero sono sta formade. E cosi come so-
no: hano da sir cognoscude. Pero ne la cognitione
de tute le cose: questa pratica e necessaria. E per
intrar nel proposito mio: primo sapi lectore: che qn-
to fa al proposito nostro: Numero e vna moltitu-
dine congregata ouero insembrada da molte vni-
tade. et al meno da do unitade. come e. 2. il quale
e lo primo e menore numero: che se truoua. La v-
nitade e quella cosa: da la quale ogni cosa si ditta
vna. Segõdario sapi: che se truoua numeri de tre
maniere. El primo se chiama numero simplice. lal
tro numero articulo. El terzo se chiama numero

Рис. 49. Тревизская арифметика 1478 г., считавшаяся в течение последних 100 лет первой печатной книгой по математике.

с начала XVI в. цифры принимают постепенно современный вид. В математических книгах XV в. (инкунабулах), самыми ранними из которых до сих пор считались Тревизская арифметика 1478 г., Бамбергская арифметика 1483 г.[1] (обе эти книги известны только в 2 экземплярах), в арифметике Видмана 1489 г. и некоторых других цифры значительно отличаются по форме от нынешних. В самое последнее время была обнаружена более ранняя математическая книга: немецкий алгоритм 1475 г. (25). Первая страница Тревизской арифметики дана на снимке.

Понятно, что в период рукописных книг в каждой из них цифры носили в известной мере субъективный характер почерка переписчика или известной школы переписчиков.

Неоднократно ставился вопрос о том, не выражает ли форма наших цифр какую-нибудь общую идею. На этот вопрос давались разные ответы. Указывалось, например, что цифрам можно дать такую форму, сохраняя в общем подобие со стандартным их видом, при котором в форме цифры имеется столько углов, или чёрточек, или точек, сколько единиц содержит обозначаемое число. Все эти гипотезы научного значения не имеют.

В материалах записных книжек А. С. Пушкина (см. «Полное собрание сочинений», т. IX, изд. «Академия», 1937, стр. 401) имеется заметка: «Форма цифр арабских составлена из следующей фигуры: *AD* (1), *ABDC* (2), *ABECD* (3), *ABD+AC* (4). Русские цифры составлены по тому же образцу».

[1] *Тревизо* — город и провинция около Венеции; *Бамберг* — город в Баварии.

Это замечание, как и все другие объяснения формы наших цифр, никакого исторического основания не имеет, что ясно из обозначения приложенной таблицы, дающей главные этапы эволюции наших цифр. Из неё же видно, что одни цифры очень давно приняли современный вид (1, 2, 3, 8, 9), другие же сравнительно недавно. В начертаниях цифр 1, 2, 3 можно видеть их простейшие иероглифы — одну, две и три чёрточки.

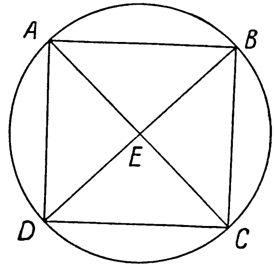


Рис. 50. Гипотеза А. С. Пушкина о происхождении наших цифр.

В историях математики до настоящего времени не отмечался факт, на который ниже обращается внимание читателя.

Ещё до сих пор цифры, даже в учебниках математики, называются часто арабскими. Как видно из предыдущего, для этого нет никаких оснований. Известные индийские документы с первоначальными формами наших цифр значительно древнее арабских.

В науке индийское происхождение так называемых арабских цифр было признано лишь в XIX в. Первым учёным, высказавшим эту, для того времени новую, мысль, был русский ориенталист Георг Яковлевич Кер (1692—1740). Кер с 1731 г. служил в Москве переводчиком коллегии иностранных дел. Он имеет и другие важные заслуги в истории востоковедения в России [1].

29. АБСТРАКТНЫЕ ЧИСЛА. ЕДИНИЦА КАК ЧИСЛО

Понятие числа возникло из счёта конкретных предметов. «Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой всё что угодно, только не продукт свободного творчества разума» (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, М., Госполитиздат, 1953, стр. 37). Счёт различных между собой предметов стал позднее проводиться отвлечённо от природы этих предметов; этот процесс создаёт абстрактное понятие числа; возникает ряд натуральных чисел. «Прошло много тысячелетий, прежде чем человек усвоил, что два фазана, две руки, два человека и так далее можно назвать одним и тем же словом «два»,— говорит современный историк культуры [26].

Переход от конкретного числа к абстрактному представлял большие трудности для человека, труден и сейчас в начале про-

---

[1] См.: И. Ю. Крачковский, Очерки истории арабистики в России и СССР, в сб. «Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры», т. III, кн. II, «Учёные записки Московского университета имени М. В. Ломоносова», вып. 107, 1946.

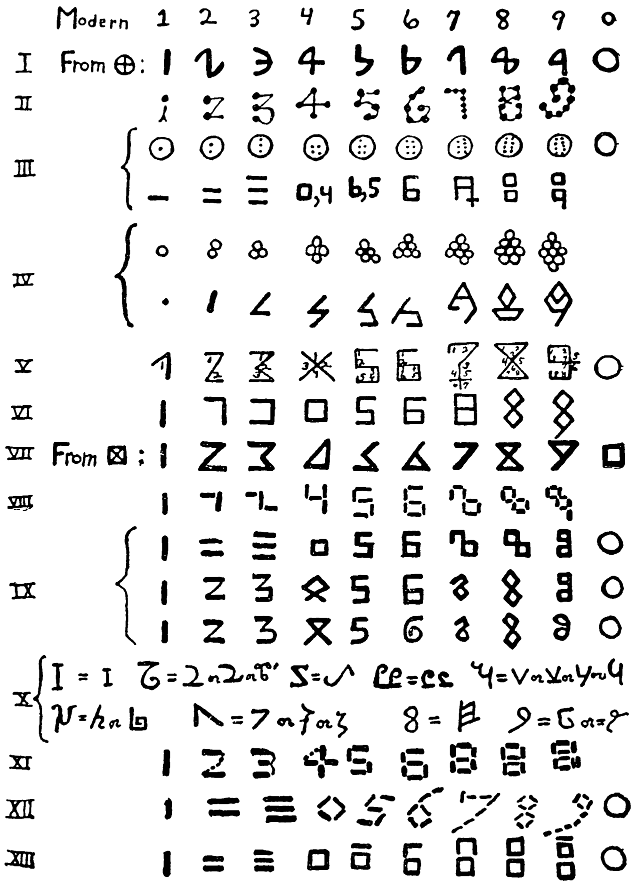


Рис. 51. Сводная таблица разных попыток объяснения происхождения формы наших цифр.

цесса обучения, что хорошо известно учителю. Красочно представлена эта трудность писателем Т. Сёмушкиным. Он занимательно рассказывает о трудном положении учителя на уроках арифметики в чукотской школе.

«Урока арифметики ребята ждали с огромным интересом и занимались с удовольствием.

В начале занятий были большие осложнения с решением простых задач. Учителю трудно было толково и понятно объяснить условие задачи, а главное — все задачи были вымышлены, и дети считали их «лживыми».

Услышав условие задачи, школьники непременно спрашивали:

— Когда и где это было?

И когда выяснилось, что этого факта в действительности не было, они говорили:

— Эта задача, которую ты нам даёшь, — лживая задача, и решать мы её не будем.

Они требовали, чтобы в основе задачи лежал факт, и обязательно правдоподобный.

— Охотник Уквылькот, — читает учитель условие задачи, — в первый день убил пять тюленей. На другой день он убил ещё шесть. Сколько всего за два дня убил Уквылькот тюленей?

— Это какой Уквылькот? Яндагайский, что ли? — немедленно раздаются голоса со всех сторон.

— Ну, хотя бы Яндагайский.

Дети начинают смеяться. Потом выясняется, что Яндагайский Уквылькот очень ленивый охотник и что больше двух тюленей он никогда в жизни не убивал. И то это такие тюлени, которые сами лезли ему под ружьё.

— Как же мы будем решать такую лживую задачу?

В первые дни совершенно невозможно было преодолеть конкретное мышление чукотских детей. Отвлечённое мышление раздражало их. Они считали учителя по меньшей мере выдумщиком, вернее—лгуном» (Т. Сёмушкин, Чукотка, 1954, стр. 125—127).

Ту же трудность перехода от конкретного понятия числа к абстрактному изображает Г. Гор в своей повести.

Автор учил способного нивха (гиляка) по имени Нот, первого представителя этой народности, получившего в будущем научное образование. Вот что пишет автор повести «Юноша с далёкой реки»:

«Я помогал Ноту решать задачи... Задача была лёгкая, совсем простая, но Нот никак не мог её решить. Нужно было к семи деревьям прибавить ещё шесть или от тридцати пуговиц отнять пять.

— Какие деревья? — спросил Нот, — длинные, короткие? Какие пуговицы? Круглые?

Прежде чем решать, он хотел представить себе во всей конкретности и деревья, и пуговицы.

— В математике, — ответил я, — не имеют значения качество и форма предмета.

Нот меня не понял. И я тоже не сразу понял его. Он мне объяснил, что у нивхов для длинных деревьев существуют одни числительные (формы числительных), для коротких — другие, для круглых предметов третьи... У них есть арифметика, в которой числительные выражали не только количество, но и качество предметов» (стр. 41).

У нивхов, как и у многих других народов, стоящих на низкой ступени культуры, не развилось ещё абстрактное мышление. «Нивх не скажет, например, человек стрелял. Он должен непременно добавить, в кого стрелял — в утку, в чайку или в белку»

(Л. Успенский, Слово о словах, стр. 172). «Нет у них и порядковых числительных. Нот, например, не мог сказать на своём языке «первый дом», а должен был сказать «в верхнем конце стойбища находящийся дом». Он не мог сказать «третий дом», а вместо этого должен был говорить: «в верхнем конце стойбища находящийся дом, ещё следующий находящийся за ним дом» (Г. Гор, стр. 65).

Трудность, которую встречали учителя в чукотской школе и которую испытывает любой учитель первых классов каждой школы, вызывается, как правило, при переходе от конкретного мышления к абстрактному. Необходимость такого перехода выступает на уроках математики раньше и резче, чем на уроках других предметов. Отсюда возникает общее мнение о трудности математики.

Первые названия чисел у человека были не новые слова, обозначающие абстрактные понятия, а названия предметов. Названиями для чисел один, два, три и т. д. были то названия пальцев, то других предметов: 1 — луна, 5 — рука, 20 — весь человек, т. е. две руки и две ноги, и т. д. На языке племени таманаки (в Гренландии) число 18 называется: «Со второй ноги три», т. е. 10 (две руки) + (первая нога) + 3 пальца со второй ноги.

Перенесение на одиночные или групповые отвлечённые понятия названий реальных, знакомых человеку вещей — обычное явление: не имея отвлечённого понятия «круглый», человек говорил «как луна»; не имея слова «твердый», он говорил «как камень». Подтверждением того, что первые «числительные» явились «существительными», служит и тот факт, что во многих языках грамматические формы и правила для первичных по времени возникновения числительных отличны от форм для других числительных, возникших позднее. Так, например, в русском языке один и два изменяются по родам: один, одна, одно, два, две; дальнейшие числительные по родам не изменяются. Это же явление имеет место в латинском языке для числительного три — tres для мужского рода, tria для женского.

Понятие абстрактного числа имеет уже египетский писец Ахмес, писавший свой конспект между 1780 и 1580 гг. до н. э. «по старинным образцам»: в задаче № 79 своего собрания он находит общее число домов, кошек, мышей, колосьев, зёрен и т. д. Задача читается так: «Домов (или писцов — смысл иероглифа не установлен) 7, кошек 49, мышей 343, колосьев 2401, зёрен 16 807, вместе 19 607». По-видимому, смысл задачи следующий: «В семи домах имеется по 7 кошек ($7\times7=49$); каждая кошка съедает по 7 мышей ($7\times49=343$); каждая мышь уничтожает по 7 колосьев ($7\times343=2401$); каждый колос даёт по 7 мер зерна ($7\times2401=16\,807$); вместе составляет 19 607». Конкретного смысла задача не имеет и является или первой по времени занимательной задачей, или задачей для упражнения в вычислениях. Во всяком случае, решающий задачу здесь обращается с абстрактными числами, так как сложение кошек, мышей, колосьев и так далее не имеет конкретного смысла. Задача интересна ещё в том отношении, что показывает знание египтянами степеней числа: $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5$.

Задачи, аналогичные этой египетской, встречаются в разных вариантах у отдельных народов. У Леонардо Пизанского в его книге «Liber abaci» (книга абака), написанной в 1202 г., задача имеет форму: «Семь старух идут в Рим. У каждой по 7 мулов, каждый мул несёт по 7 мешков, в каждом мешке по 7 хлебов, в каждом хлебе по 7 ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всех?»

В вышедшей в 1801 г. в Соединённых Штатах Америки «Школьной арифметике» Д. Адамса задача дана в стихотворной форме; русский перевод ее:

В Сент-Айвз как-то я шагал
И семь женщин повстречал;
И у каждой семь мешков,
А в мешках по семь котов,
У котов по семь котят.
Сколько всех пройти хотят
В Сент-Айвз: женщин и мешков,
И котяток, и котов?

(Стихи Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки», кн. III.)

Профессор И. Ю. Тимченко в примечаниях к «Истории элементарной математики» Ф. Кеджори даёт русскую редакцию этой задачи, записанной им в Орловской губернии [1]:

Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей,
На каждом костыле по семи сучков,
На каждом сучке по семи кошелей,
В каждом кошеле по семи пирогов,
В каждом пироге по семи воробьёв,
Сколько всего?

Во всех редакциях этой задачи имеется сложение не конкретных предметов. Быть может, такое нагромождение самых различных объектов для сложения имело целью подчеркнуть тот факт, что складываются уже не множества объектов, а абстрактные числа.

Возвращаясь к египетской задаче, можно отметить, что у автора сборника имеется понятие абстрактной единицы. Однако для единиц различных разрядов употребляемой им десятичной системы счисления у египтян имелись различные знаки. Шаг вперёд делают вавилоняне, обозначая единицы любых разрядов одним и тем же знаком. Таким образом, оба эти народа глубокой древности подошли к освоению понятий абстрактной единицы.

[1] И. А. Износков в 1884 г. сообщал в Казанском обществе естествоиспытателей эту же задачу как народную русскую.

Греческая математика и философия классического периода называли числом только натуральное число, т. е целое положительное, как собрание единиц. Единица для них не была числом, «она является только зародышем, эмбрионом числа, так как она лишена свойства множественности». Так учили пифагорейцы и философы школы Платона. Евклид говорит: «Число — множество, составляемое из единиц. Единица же — это то, вследствие чего существующее является единым». Она, во всяком случае для Евклида, не число. Отсюда становится понятным, что Евклид, установив («Начала», VII, 9 и 13), что из пропорции $a:b=c:d$ следует: $a:c=b:d$, в дальнейшем (VII, 15) особо доказывает это свойство для пропорции $1:b=c:d$. Неоплатоник (последователь учения Платона) Теон Смирнский (II в. н. э.) настойчиво повторяет: «единица не есть число, а только источник числа», хотя несколькими строками далее включает 1 в ряд нечётных чисел и позднее также в ряд натуральных чисел. То же делает уже Никомах (I в. н. э.), говоря, что каждое число есть полусумма двух равноудалённых от него в противоположных направлениях чисел в натуральном ряду, он оговаривается, что исключением является единица, которая не имеет двух смежных чисел и является половиной единственного смежного с ней числа 2.

Некоторое отличие имеет взгляд Аристотеля на число. Он в своей «Метафизике» определяет число как множество, измеренное единицей, а про единицу утверждает, что она есть также множество, только очень небольшое. Так же о «множестве один» говорит философ-стоик Хризипп (282—209).

Что же представляет единица, греческие учёные определить не могли по той причине, что **понятие единицы есть первичное, неопределяемое понятие.**

Взгляды греческих математиков на единицу держались долгое время. Римский писатель Марциан Капелла (V в. н. э.) считает первым нечётным числом 3. Боэций (умер в 525 г.) называет единицу матерью всех остальных чисел, а приписываемый Боэцию манускрипт XII в. повторяет вновь, что единица не есть число, а источник и производитель всех чисел. Дальше этого взгляда не пошли ни арабы, ни первые европейские математики.

Единицу признают числом со всей определённостью Николай Орем (XIV в.), Пётр Рамус (1569), Симон Стевин (конец XVI в.) и некоторые другие, но ещё к середине XVII в. не достигнута единая и ясная точка зрения по этому вопросу. Валлис (Уоллис) в 1657 г. применяет всю силу своей логики для убеждения читателя в том, что единица есть число, однако Бюффон в 1740 г. заявляет, что единица всё же не есть число.

Предоставление единице права законного места в натуральном ряду чисел явилось результатом длительных дискуссий.

Симон Стевин (XVI—XVII вв.) утверждает, что единица — число, аргументируя, что 1) части имеют ту же природу, что и целое; поэтому если целое есть число, то его часть — единица — есть также число и 2) если из данного числа вычитается то, что не является числом, то число должно остаться прежним, но если из числа вычесть единицу, число не остаётся прежним. Значит, нельзя утверждать, что единица не есть число.

Исаак Ньютон.

Эти утверждения вызывали не менее убедительные возражения:

«Основное положение об однородности части с целым не всегда правильно. Существуют два рода вещей: подобно составленные и неподобно составленные. Для первых, например золота, воды и так далее, действительно части будут также золотом, водой. Но часть головы не есть голова, часть дерева не есть дерево, часть человека не есть человек. Если из целого числа, например трёх, отнять единицу, то действительно не остаётся того, что было. Но при отнятии от неподобно составленного тела его части оно также не останется тем, чем оно было. Таким же образом, если единица и не есть число, отнятие её может уменьшить данное число».

Споры о природе единицы прекратились в XVII в., но не в силу ясности решения вопроса, а потому, что интересы математиков переключились от споров о природе числа на способы его использования на практике. Труды Симона Стевина способствовали расширению путей и объектов применения в Западной Европе десятичных дробей, которые в Средней Азии были обстоятельно изучены и теория их чётко изложена более чем полтораста лет до этого Джемшидом ал-Каши. В начале XVII в. получили распространение логарифмы.

Десятичные дроби и логарифмы открыли в направлении использования числа на практике новые возможности. Бесплодными спорами о природе единицы перестали интересоваться.

Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» заявляет: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Этим был установлен современный взгляд на действительное число и на единицу, как число.

30. НУЛЬ КАК ЧИСЛО

История возникновения понятия и символа 0 изложена выше. Введение особого символа для обозначения понятия «ничто» («ввести нечто, что обозначает ничто») было естественно и не вызывало возражений, но признание нуля числом вызвало много споров и потребовало длительных усилий.

Для греков нуль, естественно, не был числом. Никомах (I в. н. э.) говорит ясно, что 1 имеет только одно-единственное смежное число и этим отличается от всех чисел. Диофант (III—IV вв.) не признаёт нуль за корень уравнения, т. е. за число. Так поступают как арабские, так и первые европейские математики Шюке (1484) и Пачоли (1494).

Голландский математик Жирар (умер в 1632 г.) первый признал 0 корнем уравнения и, следовательно, числом. Однако операции с нулем («ничто») рассматривались различными авторами до признания нуля числом, в чём нет ничего неожиданного, так как эти операции предполагали в понятии «нуль» лишь то, что он есть «ничто». Никомах говорит, что «ничто» сложенное с «ничто» даёт «ничто».

Брамагупта (род. в 598 г.) допускает и рассматривает употребление нуля во всех арифметических действиях. Махавира (около 830 г. н. э.) отмечает, что деление на 0 не есть деление. Бхаскара (XII в.) рассуждает уже совсем по-современному: частное от деления на нуль не изменится, сколько бы мы ему не прибавили или сколько бы мы от него не отнимали (бесконечно большое). Его комментатор Кришна (XVII в.) разъясняет: «С уменьшением делителя частное возрастает. Если делитель уменьшается «до крайности», то частное возрастает «до крайности», но пока делитель дан, будь он сколь угодно мал, частное ещё не возросло «до крайности», так как мы можем указать ещё большее число. Частное при таком делении (деление на 0) имеет неопределённую величину и по справедливости называется бесконечным».

Арабы взяли от индийцев из этих идей, по-видимому, немного, и европейской математике пришлось вновь вернуться к основам этих вопросов.

В анонимной рукописи XII в. встречается ясное заявление: трижды «ничто» есть «ничто». Леонардо Пизанский (1228), рассматривая корень квадратного уравнения $x = 2 \pm \sqrt{4-4}$, разъясняет, что, если от 4 отнять 4, получится 0; прибавляя и вычитая это значение, придём к корню уравнения $x = 2$. Это же уравнение решает Шюке (1484) и подчёркивает, что при действии 4—4 остаётся 0; корень из 0 есть 0; прибавляя или вычитая 0, получаем 2; это и есть искомый корень. Итальянский математик Бельдоманди (умер в 1428 г.) заявляет: «Знай, что при умножении нуля на нуль, или действительного числа на нуль, или наоборот, всегда получается нуль». Каландри (1491) пишет перед всеми правильными дробями нуль целых, придавая всем дробным числам вид смешанного числа. Стифель в своей «Арифметике» пишет уравнение, в котором в правой части стоит 0 (впрочем, Нёйгебауэр утверждает, что уже в вавилонских клинописях встречается такой случай) [27] и двучлен x^3+1 в виде $x^3+ + 0x^2 + 0x + 1$. Тарталья (1501—1557) производит вычитания:

$$\begin{array}{r} \sqrt{45}+0 \\ -\quad \\ \sqrt{5}+3 \\ \hline \sqrt{20}-3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \sqrt{45}-0 \\ -\quad \\ \sqrt{5}+3 \\ \hline \sqrt{20}-3 \end{array}$$

Кардано рассматривает уравнения:

$$x^3 = 0 + x, \qquad x^3 = 213 + 0x.$$

Здесь, как и в примерах Стифеля, способ письма переведён на современные символы.

Таким образом, постепенно 0 завоёвывает признание как число, но после значительного противодействия. В 1657 г. Валлис (Уоллис) заявляет: «Нуль не есть число», и аргументирует это заявление в собрании своих сочинений, изданных в 1595 г.

Введение идеи координат (Ферма, Декарт) и числовой оси решило вопрос окончательно, убедив, что положительные, отрицательные числа и нуль имеют равные права называться числами, так как каждое из них определяет точку на числовой оси.

Явное введение равенств: $a\pm0=a$, $0+a=a$, $0+0=0$, $a\cdot0=0$, $0\cdot a=0$, $0\cdot0=0$ и вытекающих из них предложений в результатах обратных действий появилось в руководствах арифметики после того, когда выяснили, какая система предложений является достаточной и необходимой для получения из неё всех правил арифметики натуральных чисел, включающих и 0. До XIX в. пользовались без всякого обоснования в арифметике нулём как числом. Это было необходимо прежде всего для осмысливания действия вычитания числа из равного ему числа. Введение нуля как числа позволило писать

$$a - a = 0.$$

Возникновение аксиоматического построения арифметики натуральных чисел изложено в следующем параграфе. Несколько утверждений по вопросу о нуле вошло в историю математики. Однако не все эти утверждения можно принимать без оговорок. «С введением нуля как числа счёт стал всем доступным» или «Нуль одомашнило число».

В начале XVI в. в германских университетах учреждаются математические кафедры по примеру Венского университета.

Профессора этих новых кафедр были вынуждены предупреждать своих будущих слушателей, что предлагаемые лекции математики будут ограничены вопросами начального счёта и не явятся недоступными для студентов.

О трудностях вычислений свидетельствуют многие высказывания людей, близко сталкивавшихся с ними, и математиков. «Будь силен в расчётах и часу не проводи без повторения их, ибо наука математика — наука свирепая»,— поучает отец сына в книге восточной мудрости XI в. («Кабус-намэ», изд. АН СССР, 1953) .

Изобретатель логарифмов шотландец Джон Непер (1550—1617) в 1617 г. издаёт книгу под заглавием «Рабдология», в которой изложены разные приёмы облегчённого счёта, в том числе счёт при помощи палочек с надписанными числами[1]. В предисловии к книге Непер пишет: «Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, освободить людей от трудности и скуки вычислений, докучливость которых обыкновенно отпугивает очень многих от изучения математики». Оценивая высоко изобретение логарифмов, великий французский математик Лаплас ставит Неперу в заслугу то, что он этим изобретением удлинил жизнь астрономам, облегчив им вычисления. Таких высказываний о трудности вычислений и арифметических операций можно было бы привести много. Очевидно, благодаря этим трудностям усвоение счёта шло очень медленно.

Учитель арифметики нередко приходит в отчаяние, наблюдая, с каким трудом многие из его учащихся усваивают арифметику. На основе опыта ему станут понятны приведённые исторические факты, рассказывающие о том, что встреченные им трудности характерны при изучении арифметики.

Дальнейшее движение науки, усовершенствование дидактических и методических приёмов, улучшение учебных пособий, а главное, сближение изучения арифметики с жизнью — всё это при его осуществлении избавит учителя и учащихся от многих мучительных моментов в процессе преодоления трудностей усвоения счёта.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ К ТАБЛИЦЕ О ПРОИСХОЖДЕНИИ НАШИХ ЦИФР

Помещённая ниже таблица взята из книги «История элементарной математики в систематическом изложении со специальным рассмотрением терминологии» доктора Иоганнеса Тропфке, т. I, изд. 3 (улучшенное и расширенное), Берлин и Лейпциг.

«Geschichte der Elementar — mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter von Dr. Johannes Tropfke, Erster Band, dritte, verbesserte und vermehrte Auflage, Berlin und Leipzig, 1930, Walter de Groyter and C°»).

[1] «Палочки Непера», рабдология — учение о палочках.

Это издание книги имеет мало общего с первоначальным её видом, вышедшим и в русском переводе. Она представляет 8 + 222 страницы мелкого шрифта: по меньшей мере четверть книги занимают 1343 литературных указаний источников, напечатанных петитом. Третье, совершенно переработанное и почти вдвое расширенное, издание «Истории элементарной математики» (второе издание в семи книгах было закончено в 1924 г.) доведено автором лишь до третьего тома.

Виктор Викторович Бобынин.

Иоганнес Тропфке (1866—1939) как историк науки известен тщательной проверкой и документальным подтверждением сообщаемых им данных. Работа его премировалась в 1939 г. медалью имени Лейбница, присуждаемой Берлинской Академией наук за учёные заслуги. Отзыв Академии гласит: «В семитомном труде по истории элементарной математики Тропфке, вышедшем впервые в 1902 г., а в настоящее время имеющемся во втором и отчасти в третьем изданиях, отложен труд целой жизни. Этот труд является единственным в своем роде, основанным на первоисточниках и дающим систематический обзор предмета. Автор изучил полностью всю литературу истории математики и отразил результаты этого изучения в примечаниях. Труды автора в течение многих десятилетий создали многотомную книгу, которая является незаменимым справочником для каждого, интересующегося происхождением и эволюцией отдельных проблем математики».

Примерно в таком же тоне выражены отзывы в связи с выходом третьего издания труда Тропфке в английском журнале «Nature» (т. 132, № 3337) и известного историка математики О. Нейгебауэра («Naturwissenschaften», 1933). Рассматривая эти подробности, следует обратить внимание на исключительно ценный труд скромного автора (Тропфке не был университетским работником, а лишь деятелем школьного преподавания, который во многом сходен с нашим Виктором Викторовичем Бобыниным (1849--1919).

Последний почти всю свою жизнь — до революции — также оставался в основном преподавателем средних военных школ, в которых ежедневно давал по 6 уроков. а во «вторую половину дня» выполнял колоссальный труд по созданию основ истории математического образования и математики в России и по изданию журнала «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем» (13 томов, 1885—1898 и «Физико-математические науки в ходе их развития», т. I, 1899—1904, не говоря о большом числе отдельных статей).

Труд Тропфке (недавно вышел том IV третьего издания под редакцией историка математики Гофмана) заслуживает исключительного внимания по его точности, поэтому таблица, изображающая процесс происхождения наших цифр, заимствована из него (подобные таблицы, взятые из устаревших источников, появлялись в разных изданиях). Сведения же об этом замечательном труженике приводятся потому, что о нём в нашей литературе не появлялось никаких сведений, кроме двух заметок автора настоящей книги в год смерти Тропфке («Природа», «Математика в школе»).

I. ИНДИЙСКИЕ БРАМИНСКИЕ ЦИФРЫ БЕЗ ПОМЕСТНОЙ (ПОЗИЦИОННОЙ) ИДЕИ[2]

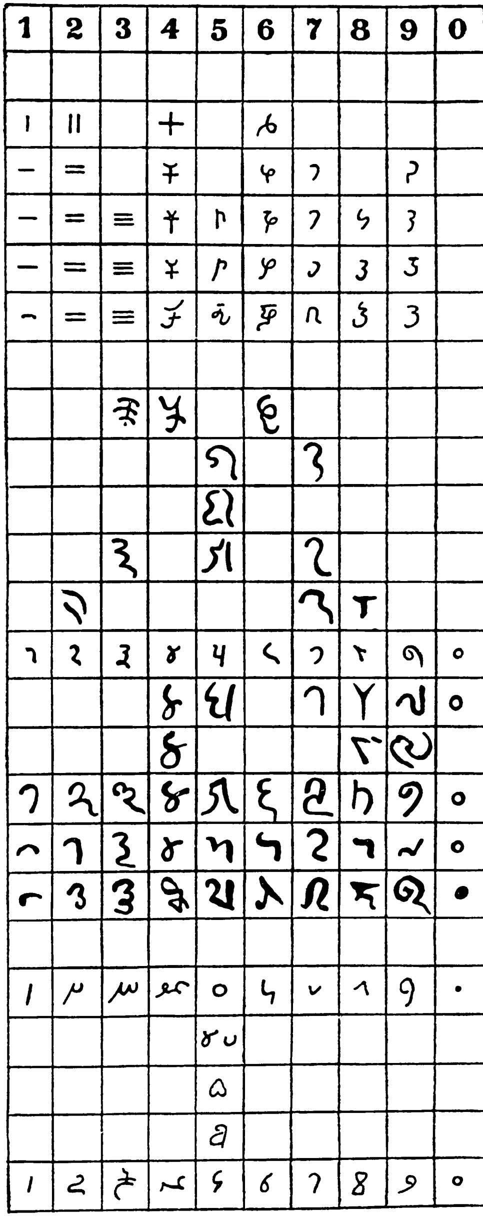
1. Надпись Ашока около 250 г. до н. э.
2. Надписи Нана Гхат около 150 г. до н. э.
3. Надпись Насик около 100 г. до н. э.
4. Монеты Кшатрапа около 200 г. н. э.
5. Надписи Гупта 300 — 400 гг. н. э.

II. ИНДИЙСКИЕ ЦИФРЫ[3] ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

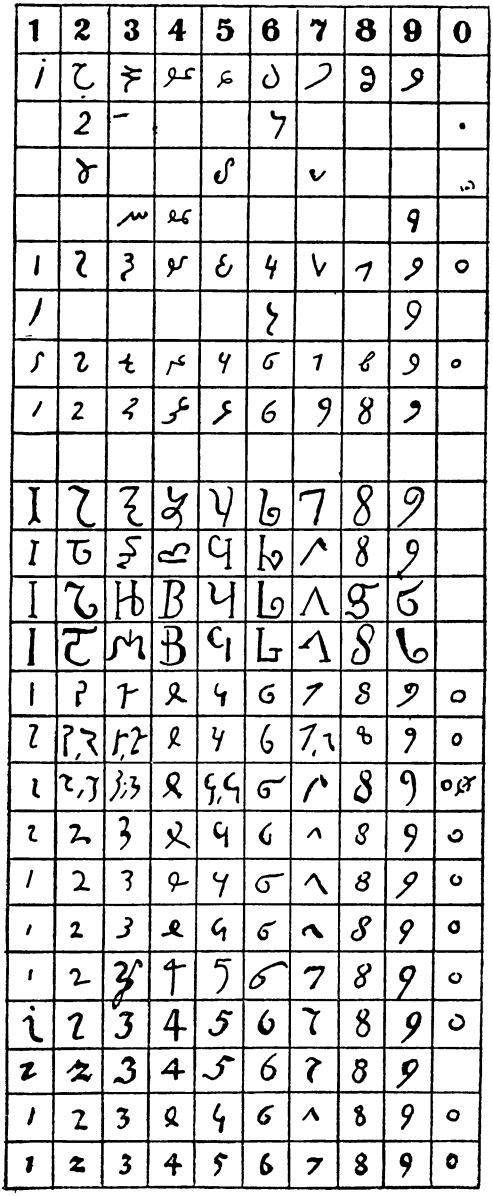
6. Надписи Гурджара 595 г. н. э.
7. » » 798 г. н. э.
8. » » 804 г. н. э.
9. Медные доски Торкхид 813 г.
10. » » » 815 г.
11. Надпись Гвалиор 876 г.
12. » » 917 г.
13. » » 972 г.
14. » » 1050 г.
15. » » XI в.
16. Рукопись Бакхшали XII (?) в. или ранее.

III. АРАБСКИЕ ЦИФРЫ[4]

17. Восточноарабские (совр.)[4]
18. Прежние восточноарабские цифры XV в.[5]
19. То же 1575 г.[6]
20. То же 1573 г.[7]
21. Гобар — цифры западно-арабская недатированная рукопись[8].



НАШИХ ЦИФР[1]



22. Гобар — цифры недатированная египетская рукопись[9].
23. Древнейшие Гобар — цифры, Египта 873 г. [10].
24. То же 888 г. [11].
25. » » 961 г. [12].
26. Ширазская рукопись 970 г. [13].
27. Египетская » 1169 г. [14].
28. Западноарабские цифры XII в. [15].
29. Рукопись 1573 г.[7].

IV. ЦИФРЫ ЗАПАДНОЕВРОПЕЙСКИЕ

30. Вигиланский кодекс (испан.) 976 г. [16].
31. Альтдорфский (Цюрих) XI в [17].
32. Рукопись Боэция (Шартр XI в. [18].
33. Рукопись начала XII. в. [19].
34. » XII в. [20].
35. » около 1200 г. [21].
36. Рукопись в Сигмарингене 1303 г. [21].
37. Латинский кодекс, Берлин, конца XIV в. [22].
38. Рукопись Сакробоско 1442 г. [23]
39. Рукопись эпохи 1427 — 1468 гг. [24].
40. Гейдельбергская рукопись XV в. [25].
41. «Философская жемчужина», 1508 г.[26].
42. Цифры рукописи Дюрера, 1525 г. [27].
43. Цифры Региомонтана, 1474 г. [28].
44. Печатные цифры Видмана, 1489 г. [29].

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ К ТАБЛИЦЕ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ЦИФР

Нумера соответствуют нумерам таблицы

1) G. F. Hill, On the Early Use of Arabic Numerals in Europe. Archäologie, t. 62, Oxford, 1910, p. 137—190.

2) Smith and Karpinski, The Hindu-Arabic Numerals, Boston, 1911, p. 25.

3) Smith and Karpinski, p. 49—50.

4) A. P. Pihan. Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes, Paris, 1860.

5) C. J. Gerhardt, Études historiques sur l'arithmétique de position, Berlin, 1856; Smith and Karpinski, p. 56.

6) Арабский манускрипт 1575 г. из коллекции руководств арифметики Плимптона, ныне принадлежащей Колумбийскому университету и описанной в больших изданиях: «Rara arithmetica» D. E. Smith (книги и рукописи до 1600 г.), Boston, 1908, 13+508; Addenda to rara arithmetica, by D. E. Smith, 1939, 52 pp.; Karpinski, Addenda to rara arithmetica, 1946.

7) Fr. Woepcke, Introduction au calcul Gobari et Hawai, Atti dell'Academia Pontifica dei nuovi Lincei, 19, p. 365.

8) Pihan, p. 209, Reinaud, Mémoire sur l'Inde, Paris, 1849.

9) Silvestre de Sacy, Grammaire arabe, Paris, 1810, tabl. VIII (без нуля). De Sacy берёт эти цифры и сопоставляемые с ним коптские цифры из манускрипта аббата de Saint-Germain-des-Près № 334, в Парижской национальной библиотеке (Suppl. arabes de la Bibl. impér. № 1912). De Sacy ссылается также кратко на многие арабские манускрипты, писанные в Египте. На этом основании манускрипт De Sacy кажется имеющим египетское происхождение Pihan называет эти цифры азиатским видом цифр гобар.

10) Год 260-й иджры (мусульманского календаря), соответствующий 873-му нашего летосчисления, египетский папирус; 1. Karabacek, Papyrus Erzherzog Rainer, Wien, 1894; Führer durch die Ausstellung, Wien, 1894, № 798, p. 216—217.

11) Год 275-й иджры или 888-й нашего летосчисления. 1. Karabacek, Ägyptische Urkunde aus dem Kgl. Museum zu Berlin. Wiener Zeitschrift f. d. Kunde des Morgenlandes, 11, Wien, 1897.

12) Год 349-й иджры или 961-й нашего летосчисления. Надпись на одной колонне в Египте. Archaeological Report of the Egypt exploration fund for 1908—1909, London, 1910, p. 18.

13) Рукопись 970 г., написанная в Ширазе математиком Мухаммед ибн Абдель Галиб Абу Саид ал-Сиджци. F. Woepcke, Sur une donnée historique relative à l'emploi des chiffres indiens par les Arabes. Annali de scienze math. et fis. 1855, 6, p. 321—323.

14) Год 1169-й. I. Karabacek, Papyrus Erzh. Rainer. p. 176, v. XV.

15) H. Suter, Das Rechenbuch des Abu Zakarija el-Hassar, Biblioth. Math., 2, Leipzig, 1901, p. 15.

16) P. Ewald. Mitteilungen. Neues Archiv der Gesellschaft f. ältere deutsche Geschichtsforschung 8, 1883, S. 354—364; Hill [1]), p. 1.

17) C. J. Gerhardt. Über die Entstehung und Ausbreitung des dekadischen Zahlensystems. Programm, Salzwedel, 1853; на основании Mannert, De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine Pythagorica, Nürenberg, 1801; Hill [1]), p. 5.

18) C. J. Gerhardt, Über die Entstehung nud Ausbreitung des dekadischen Zahlensystems. Programm. Salzwedel, 1853. стр. 11; основываясь на «Истории геометрии» Шаля (русский перевод: «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, сочинение Шаля», 2 тома, М., 1871—1872 гг., печатался приложением к «Математическому сборнику Московского математического общества», тт. V, VI, VII, VIII, IX, X)

19) C. J. Gerhardt, 17 p. 11; Comptes Rendus 1843, Chasles; Hill, 1, 15.

20) Hill [1], 11, 2.

21) W. Wattenbach, Anleitung zur lateinischen Paläographie, IV Anhang, Leipzig, 1886, S 102 № 3 u. 6. Hill [1], 11, 3.

22) W. Wattenbach [21], № 7; Hill [1], VII.

23) D. E. Smith, Rara arithmetica, p. 450; Hill [1], X, 6; Smith and Karpinski [2], p. 143.

24) P. Treutlein, Geschichte unserer Zahlzeichen, Karlsruhe, 1875, 8. 95, № 6.

25) W. Wattenbach [21], № 5.

26) Treutlein [24], № 5.

27) Treutlein, № 4.

28) Hill, XXX, № 6.

29) Iohannes Widman von Eger, Behende und hubsche Rechenung auf allen Kauffmannschaft, Leipzig, 1489.

Труды указанного в тексте проф. Н. М. Бубнова. «Происхождение и история наших цифр», Киев, 1908, 192 стр.

«Арифметическая самостоятельность европейской культуры», Киев, 1908, 12+408 стр.

«Забытая арифметика классической древности»: «Древний абак — колыбель современной арифметики», Киев, 1916, 32+122+34 стр.

«Абак и Боэций». Историко-критическое исследование в области средневековой науки, Пг., 1915, 24+327 стр.

«Подлинное сочинение Герберта об абаке или система элементарной арифметики классической древности». Филологическое исследование в области истории математики, Киев, 1911, 510 стр.

«Происхождение современного счисления». «Киевские университетские известия», 1913, 116 стр. Работа, по-видимому, в связи с войной и эвакуацией университета осталась незаконченной.

Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972—1003). Collegit, ad fidem codicum manuscriptorum partim iterum, partim primum edidit, apparatu critico instruxit, commentario auxit, figuris illustravit Dr. Nicolaus Bubnov, Professor Kijoviensis. Beralini, 1899, 120+622 p. et tab. (Герберта, впоследствии папы Сильвестра II, Математические труды, 972—1003). Собрал, согласно рукописным кодексам, частью повторно, частью впервые издал, критическим аппаратом снабдил, комментариями дополнил, чертежами иллюстрировал доктор Николай Бубнов, киевский профессор, Берлин, 1899.

При чтении работ Н. М. Бубнова нужно критически относиться к замечаниям В. В. Бобынина, высказанным им в обширной рецензии (около 6 печатных листов), написанной по поручению Академии наук. Рецензия богата всевозможными сведениями по истории арифметики. Она напечатана в издании Академии наук «Отчёт о тринадцатом присуждении Академией наук премий митрополита Макария в 1909 г. на историко-филологическом отделении». Спб., 1911.

Нейтральное, скорее сочувственное изложение теорий Бубнова дано в работе: Harriet Pratt Lattin, The Origin of theories of Nicholas Bubnov. Columbus, Ohio. О нём же: Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik 30, 3; 36, 51; 38, 62; 39, 53; 45, 64, 121.

Новейшие работы Н. М. Бубнова: Postanak savremenog nacina pisanja brojki i cifara. Rad. Iugoslavenske Akademije Znanosti i Umjetnosti, Razreda Mat.— Prirodoslovnogo, Zagreb, 230, 1925, и Fzvjesca o raspravama, 1924.

32. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ АРИФМЕТИКИ

Изложенная в предыдущих параграфах история возникновения и эволюции учения о натуральном числе, по существу,— история развития счисления на пальцах, на счётах, на абаках разного вида — словом, на конкретных множествах. Арифметика этих чисел основана на свойствах конечных множеств.

Изложение школьной арифметики явно с понятий теории конечных множеств начал немецкий математик Фридрих Мейер, сотрудник Георга Кантора по созданию теории множеств, в своём учебнике 1885 г. У нас, как указано выше, это делает проф. И. К. Андронов в своих учебниках арифметики 1951 и 1955 гг. («Арифметика натуральных чисел» и «Арифметика дробных чисел и основных величин»).

Естественно возникает вопрос: из каких первичных положений можно вывести всё учение о натуральном числе без ссылок на наглядность, на опыт. Иными словами, следует установить, какие предложения арифметики натуральных чисел нужно принять без доказательства, чтобы из них можно было вывести все теоретические положения арифметики натуральных чисел.

Предложения, принимаемые без доказательства, получили уже в древности название аксиом. Впервые этот термин встречается у Аристотеля для обозначения общепризнанных положений. У Евклида нет термина «аксиома», а принимаемые без доказательства предложения называются **общими понятиями.**

Итак, возник вопрос об аксиомах арифметики натуральных чисел.

В Греции из математических наук ранее других развилась геометрия. В ней возник прежде всего вопрос об аксиомах и основанном на аксиомах — аксиоматическом — построении геометрии. Вопрос этот в весьма совершенном для своего времени виде был решён Евклидом (около 300 г. до н. э.). «Начала» Евклида в течение двадцати с лишним веков считались образцом логического построения системы науки на основании выбранной системы аксиом. Евклид даёт в начале изложения перечень определений, требований (постулатов) и общих понятий (аксиом), а затем большое число теорем, которые доказываются в основном на базе аксиом и постулатов. Для Евклида аксиомы — это самоочевидные истины.

Однако среди аксиом и постулатов у Евклида было предложение, которое казалось другим авторам недостаточно очевидным. Это аксиома (или постулат), который у Евклида звучит так: «Если прямая, падающая на две прямые (пересекающая их), образует внутренние и по одну сторону углы меньше (в сумме) двух прямых углов, то неограниченно продолженные эти две прямые встретятся на той стороне, где углы меньше двух прямых». Это предложение продолжателям Евклида не представлялось более очевидным, чем многие из тех предложений, которые доказываются.

Делались многочисленные попытки превратить это предложение в теорему выводом его из других аксиом, т. е. доказать постулат Евклида, но все эти попытки оказались безрезультатными. Великий русский учёный Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) доказал, что предложение Евклида действительно является аксиомой — предложением, которое нельзя вывести из других аксиом Евклида. Лобачевский построил новую геометрию, в которой все предложения до постулата Евклида и не зависящие от этого постулата совпадают с соответственными пред-

Рис. 52. Евклид представляет царю Птолемею свои «Начала».

ложениями геометрии Евклида, все предложения же, основывающиеся на постулате параллельных, отличны от соответственных предложений Евклида[1].

Геометрия Н. И. Лобачевского послужила началом появления разных неевклидовых геометрий.

Отсюда вытекает взгляд, согласно которому аксиомами являются не только самоочевидные истины, но вообще предложения, принимаемые нами без доказательства. Новая геометрия Лобачевского десятки лет не получала признания и называлась воображаемой. Однако в XX в. она стала важным орудием современной науки о природе (астрономии, физики), особенно в области движения. Давая учащимся определение аксиомы как предложения, принимаемого без доказательства, учителю следует увязывать это с доступным изложением взглядов великого учёного и революционера в науке Н. И. Лобачевского.

В развитии арифметики и алгебры XIX в. наблюдались явления, подобные изложенным для геометрии.

Ирландский математик Джордж Буль (Буул) (1815—1864) около 1850 г. издал несколько книг по логике и математике, в которых излагается некоторая новая арифметика (алгебра), идущая в разрез с употребительной арифметикой. В основе её лежит система аксиом, среди которых, кроме ряда предложений обычной арифметики (вроде $a+b=b+a$, $ab=ba$ и др.), имеются и отличные от аксиом обычной арифметики, например такая: $(a+b)\cdot(a+c)=a+bc$.

Новую арифметику рассматривали как игру с символами, лишённую какого бы то ни было практического смысла. Однако в настоящее время те электронные счётные машины, о которых говорилось в предыдущих главах, построены с использованием этой необычной, называвшейся долгое время бессмысленной, арифметики Буля. Вскоре после появления работы Буля был поставлен вопрос о системе аксиом, которые лежат в основе обычной («применимой») арифметики. Вопрос был решён в 1889 г. Система аксиом арифметики, установленная итальянским математиком Пеано (1858—1932) и принятая в настоящее время наукой, состоит из четырёх предложений:

1. Единица (у других авторов нуль) есть натуральное число, не следующее непосредственно ни за каким натуральным числом, иными словами: 1 или 0 есть первое число натурального ряда.

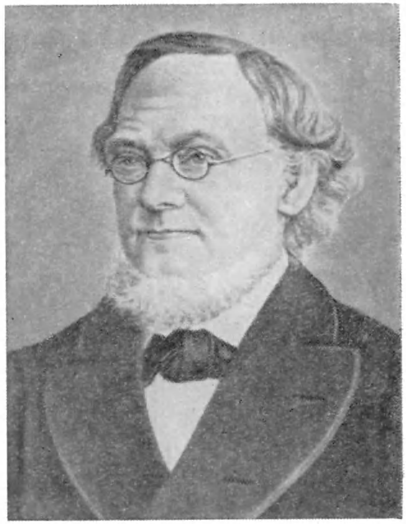
2. За каждым натуральным числом a непосредственно следует одно и только одно натуральное число a'.

3. Каждое натуральное число a, отличное от 0 (у других авторов отличное от 1), имеет одно и только одно натуральное число, за которым число a непосредственно следует.

---

[1] Выводы этой геометрии во многих случаях противоречат нашим обычным взглядам на вещи, но среди них нет ни одного, нелепость которого могла бы быть установлена (Адамар, Геометрия, ч. 1, Учпедгиз, 1948). (*Ред.*)

Бернард Больцано.



Герман Грассман.

Платон Сергеевич Порецкий.

Готлоб Фреге.

4. Если какое-либо утверждение а) справедливо для $n=1$ (или $n=0$) и в) если из предположения о справедливости этого утверждения для произвольного натурального числа $a>1$ следует справедливость его для числа $a+1$, то это утверждение считается справедливым для всякого натурального числа, большего a.

Если определить сложение и умножение равенствами:

$$a+(b+1)=(a+b)+1,$$

$$a\cdot(b+1)=ab+a,$$

то все правила арифметики натуральных чисел могут быть выведены из указанных четырёх аксиом.

Такое определение действий сложения и умножения натуральных чисел было введено впервые чешским математиком Больцано (1781—1848) в 1810 г. и затем, независимо от него, немецким школьным учителем, гениальным математиком Грассманом (1809—1877) в 1861 г. и ещё раз, независимо от предшественников, немецким математиком Ганкелем (1839—1873) в 1869 г.

Вследствие того что работы Больцано долгое время оставались забытыми, аксиоматическое построение арифметики обычно связывается с именами Грассмана и Ганкеля, что является несомненной ошибкой [28]. Независимо от работ Больцано и предшествовавших работ немецких математиков начал выявление аксиом арифметики Н. И. Лобачевский («Алгебра или счисление конечных», 1834).

К этим именам надо присоединить ещё имя немецкого учёного Фреге (1848—1925). Он с 1879 г. развивал с большой подробностью те же идеи, которые высказал в своё время Больцано, но и они остались незамеченными в науке.

Работы Буля, Фреге и Платона Сергеевича Порецкого (1846—1907) представляют основу науки математической логики, в области которой в настоящее время происходит весьма интенсивная работа. В СССР большие достижения в развитии математической логики имеет член Академии наук СССР П. С. Новиков и ряд других.

Вопрос об аксиомах арифметики оказался чрезвычайно сложным и трудным. Идеи Больцано, Буля, Порецкого и Грассмана на протяжении десятилетий оставались непонятыми. Тщательно разработанное учение Готлоба Фреге было признано математиками только в 1903 г.

Сложность вопроса об аксиоматическом обосновании арифметики иллюстрируется, между прочим, следующим фактом. Австрийский математик и логик Курт Гёдель (родился в 1906 г. в Чехословакии) в 1932 г. доказал средствами математической логики теорему: в любой системе аксиом возникают вопросы, которые данными этой системы не могут быть разрешены. Эта теорема является одним из актуальных вопросов философии математики сегодняшнего дня.

Курт Гёдель.

Николай Иванович Лобачевский.

Член-корр. Академии наук СССР
Андрей Андреевич Марков.

Член Академии наук СССР
Пётр Сергеевич Новиков.

Одной из основных особенностей математики наших дней является аксиоматическое построение её. Из предыдущих строк мы знаем, что современный взгляд на аксиомы есть дело Н. И. Лобачевского. Мы можем с гордостью констатировать факт, что Н. И. Лобачевский был не только реформатором геометрии, что признаётся всем миром уже давно, но и революционером в области математики в целом. Он является первоучителем математики XX в.

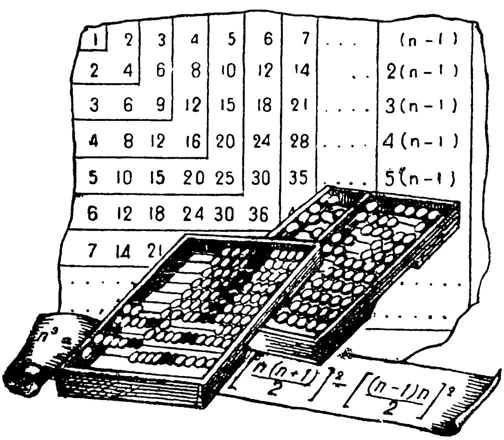
Читатель не должен на основании этого параграфа приходить к заключению, что настоящей научной арифметикой является арифметика, логически построенная из аксиом, и всё, что было накоплено человечеством до такого построения в арифметике, является первоначальным примитивным материалом для настоящей науки. «Для развивающейся математики логика является гигиеной, но она не поставляет ей пищи; насущным хлебом, которым математика живёт, являются задачи, практика», — пишет современный французский математик А. Вейль («Будущее математики»). Предыдущие параграфы нашего обзора показывают, чем арифметика питалась при своём росте. В последнем параграфе даётся понятие о том, как можно наиболее кратко и чётко изложить накопленные тысячелетиями арифметические факты.

Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891) написала драму «Борьба за счастье», в которой, начиная со второго действия, идут две параллельные драмы. Один вариант назывался «Как оно было», другой — «Как оно могло быть».

Применяя к нашему обзору развития учения о числе термины С. В. Ковалевской, можно сказать: в первых тридцати одном параграфе нашего обзора излагается развитие арифметики натуральных чисел «как оно было», в тридцать втором — «как оно могло быть», если бы арифметику строил современный математик.

Первая часть исторического изложения во много раз длиннее второй, так как она даёт описание здания арифметики в процессе строения, окружённого, как этого требует строительное дело, лесами и строительными материалами. Вторая часть значительно короче, так как леса и строительный мусор от строения удалены, и перед глазами встаёт законченное здание.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ



1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ И ВЫСШАЯ АРИФМЕТИКА

Учение о свойствах целых чисел у некоторых древних авторов (Пифагор, Платон, Никомах и др.) было облечено мистикой. Однако уже и у этих авторов имеются начатки научных сведений о натуральном числе.

Работами Пифагора (VI—V вв.), Евклида, Архимеда, Эратосфена (III в. до н. э.) и Диофанта (III—IV вв. н. э.), а в новое время трудами Ферма (1601—1665), Эйлера (1707—1783), Лежандра (1752—1833), Гаусса (1777—1855), П. Л. Чебышева (1821—1894) и современных математиков, на первом месте из которых нужно поставить академика И. М. Виноградова, — учение о свойствах целых чисел стало обширнейшей областью математики, которая богатством и глубиной своих проблем, трудностью и многообразием своих методов привлекает внимание самых выдающихся математиков [29].

Гаусс неоднократно говорил о «чарующей красоте теории чисел, придающей арифметике ту волшебную прелесть, которая сделала её любимой наукой величайших геометров».

Французский математик Ламэ, состоявший ряд лет профессором Петербургского института инженеров путей сообщения (начало XIX в.), выражал уверенность в том, что в будущем «теория чисел сделается столь же необходимой для физики, как и анализ бесконечно малых».

Уроженец России, немецкий математик Герман Минковский (1864—1909) говорил о приближении того времени, «когда самая изысканная арифметика будет торжествовать в области физики и химии, когда, например, окажется, что существеннейшие свойства вещества аналогичны с разбиением простых чисел на сумму двух квадратов». Торжество атомистических идей в современном естествознании даёт основание считать мысли Минковского уже не только мечтой.

Аналогию между методами теоретической химии и теории чисел подробно изучали в начале нынешнего века юрьевский про-

Фома Иванович Петрушевский.

Карл Фридрих Гаусс.

фессор В. Г. Алексеев и немецкий математик Гордан; об этом же писал известный представитель теории чисел Куммер (1810—1893), подчёркивая, что эти аналогии нельзя считать случайными: «причина их, — говорит он, — заключается в том, что химия и теория чисел имеют своим предметом и основным началом, хотя в разных сферах действительности, одно и то же понятие состава» [30].

Проблемы теории целых чисел являются чрезвычайно трудными, несмотря на кажущуюся их простоту. Гениальный Ферма говорит о «запутаннейших тайнах простых чисел», а Гаусс в письме к Ольберсу (1805) пишет по поводу одного арифметического вопроса: «В течение четырёх лет редко проходила неделя, в которую я не делал бы той или иной попытки развязать этот узел. Но все старания, все усилия были тщетны, и печально я клал перо. Но недавно... загадка разрешилась с быстротой молнии... и когда я изложу этот вопрос, никто не будет в состоянии представить себе, какого напряжения стоило мне это решение».

Свойства целых чисел изучаются, кроме элементарной арифметики, высшей арифметикой, или теорией чисел. Многие вопросы о числах рассматриваются в обеих этих дисциплинах.

История теории чисел на русском языке дана А. В. Васильевым («Введение в анализ», ч. I, и в книге «Целое число», 1922). В нашей книге излагается история развития только тех вопросов теории чисел и теоретической арифметики, которые входят в школьную программу или непосредственно примыкают к ней. Мы ограничимся историческими сведениями об основных видах чисел, о делимости, о простых числах и связанных с этими вопросами проблемах. Эти вопросы, зародившиеся в глубокой древности, и составляют основное содержание теории арифметики.

Полную историю развития достижений теории чисел, доведённую до 1918 г., даёт указанный во введении обширный трёхтомный труд «История теории чисел» профессора Чикагского университета Л. Э. Диксона (1874—1954) [1] [31].

2. ЧИСЛА КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ И ПОРЯДКОВЫЕ, ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ

Деление чисел на количественные (кардинальные) и порядковые (ординальные) существовало в самые древние времена, как об этом свидетельствуют соответственные грамматические формы языка. Эти формы существуют в шумерском и египетском, греческом и латинском языках. Термины «кардинальные» и «ординальные числа» встречаются впервые у римского грамматика Присциана (441—518).

Деление чисел на чётные и нечётные приписывается пифагорейцам. Платон заявляет: арифметика есть учение о чётных и нечётных числах. Различие этих двух видов чисел имеется уже у египтян. В папирусе Райнда, который относится к периоду 1850—1700 до н. э., даются представления в виде сумм долей всех дробей с числителем 2 и со знаменателями, представляющими все нечётные числа от 5 до 99. Дроби с чётными знаменателями не включены в таблицу: очевидно, во время составления таблицы уже различались чётные и нечётные числа.

Пифагорейская школа (VI и V вв. до н. э. в южной Италии), по свидетельству Аристотеля, включила в таблицу своих категорий и противопоставление чётного и нечётного, из которой уже к эпохе Платона (429—348 гг. до н. э.) возникла распространённая в широких кругах народа игра в «чёт и нечёт» (Платон, диалог «Лизида»).

В диалоге «Законы» Платон даёт определение чётного числа как числа, разбивающегося на два одинаковых целочисленных слагаемых. Это определение принимает и Евклид («Начала», кн. VII). В других своих сочинениях Платон указывает, что чётные и нечётные числа встречаются в равном количестве (диалоги «Теэтет», «Горгиас», «Республика»). Евклид определяет нечётное число как отличающееся от чётного на единицу или как не разбивающееся на два одинаковых целочисленных слагаемых. В латинском языке уже во времена Цицерона (I в. до н. э.) существуют термины «парные» и «непарные числа».

---

[1] В ней даны в хронологическом порядке все открытия теории чисел с указанием места печатания их.

С деления чисел на чётные и нечётные начинается развитие теоретического интереса человека к числам; этот момент есть начало истории теоретической арифметики, начало науки о числах.

3. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Понятие простого числа возникло также у пифагорейцев, хотя этого термина Платон не упоминает. Аристотель же, передавая отрывки сочинения Спейзиппа, преемника Платона по руководству Афинской академией, говорит о простых числах как о «пифагорейском открытии» и употребляет самый термин. Евклид (кн. VII «Начал», русский перевод. Д. Д. Мордухай-Болтовского, 1949, стр. 10) говорит: «Первое (простое) число есть измеряемое только единицей. Составное число есть измеряемое некоторым числом». В современной терминологии это означает: «Простым числом называется число, которое не имеет делителей, кроме единицы (и самого себя, что подразумевалось само собой), составным называется число, которое, кроме единицы и самого себя, имеет ещё некоторый другой делитель (или другие делители)»

В настоящее время в арифметике все натуральные числа разделяются на три класса:

1) к первому классу относится единственное число 1, которое имеет только один делитель;

2) второй класс составляют числа, имеющие только два делителя: единицу и само себя; эти числа называются простыми числами;

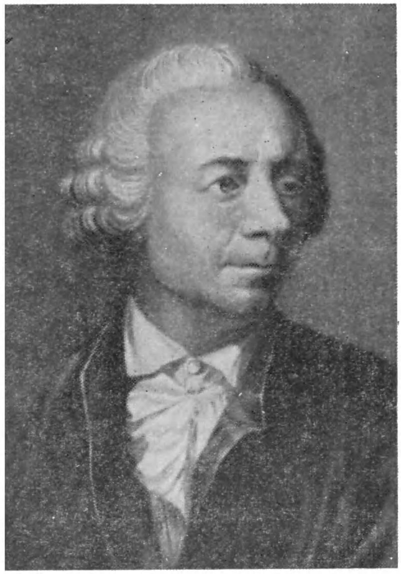
3) в третий класс входят числа, имеющие более двух делителей; эти числа называются составными.

Выделение числа 1 из класса простых чисел, к которому его раньше относили, вызвано тем, что некоторые теоремы о простых числах к числу 1 не применимы. Чтобы не оговаривать в отдельных случаях, что число 1 по отношению к этим теоремам является исключением, единицу исключили из класса простых чисел в особый класс. Явным образом это впервые сделал Л. Эйлер. Он утверждает: «Нужно исключить единицу из последовательности простых чисел: будучи началом всех целых чисел, она не является ни простым, ни составным».

Элементарный пример отличий единицы от простых чисел: сумма делителей простого числа p равна $p+1$; сумма делителей единицы равна единице; 3 имеет делители 1 и 3, $1+3=4$; 1 имеет делителем только 1.

Число 2 пифагорейцы не считали простым, в чём с ними не соглашается Аристотель. Позднее латинские авторы Капелла, Боэций и Кассиодор (V и VI вв. н. э.) употребляют термины: «первые, или несоставные числа» и «вторые, или составные числа», эти термины вошли позднее в европейские языки.

Двадцатое предложение IX книги «Начал» Евклида (русское издание, стр. 89) утверждает: «Первых (простых) чисел существует больше всякого предложенного количества их». Мы говорим теперь: «простых чисел существует бесконечное множество», но так не мог выражаться греческий автор, который избегал понятия и термина «бесконечное». Доказательство этой теоремы, данное в «Началах» Евклида, только по словесной форме отличается от того, которое даётся в наших учебниках.



Леонард Эйлер

Каждое число N имеет по крайней мере один простой делитель, которым будет само число N, если оно простое число, или некоторое другое число p, меньшее чем N, если N составное число. Последнее заключение вытекает из того, что составное число N согласно определению имеет, кроме единицы и самого себя, один или несколько делителей. Наименьший из этих делителей, отличных от единицы, есть простое число. Пример: делителями числа 16 являются 1, 2, 4, 8, 16. Наименьший из делителей, больших единицы, число 2, является простым делителем числа 16.

Указанная теорема «Начал» Евклида равносильна теореме: «Не существует наибольшего простого числа», ибо, если бы простых чисел было конечное количество, то среди них было бы наибольшее. В учебниках арифметики и доказывается, что не существует наибольшего простого числа, что за каждым простым числом, как бы велико оно ни было, следуют новые простые числа.

Положим, что существует наибольшее простое число p. Составим произведение всех простых чисел 2, 3, 5, ..., p, а затем прибавим к этому произведению единицу, получаем число

$$N = 2\cdot 3\cdot 5\dots\ p + 1.$$

Число N больше числа p. Оно или простое, или составное. В первом случае теорема доказана, так как мы получили простое число N, большее предположенного наибольшего простого числа p, и наше предположение о существовании наибольшего простого числа оказалось неверным. Если же N число составное, то оно имеет хоть один простой делитель. Этим делителем не может быть ни одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p, так как при делении числа N на любое из этих чисел получается остаток 1.

Следовательно, число N есть или само простое число, или делится на простое число, бо́льшее числа p. Предположение о том, что число p есть наибольшее простое число, неверно. Давая в равенстве $N=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots p+1$ числу p значения 2, 3, 5, 7, 11, получаем соответственные значения $N = 3, 7, 31, 211, 2311$, которые являются числами простыми. При $p = 13$ имеем:

$$N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1 = 30\,031 = 59\cdot509,$$

число составное, делящееся на простое число, большее 13, именно на 59.

Следует исправить ошибку, вкравшуюся в очень ценные комментарии профессора Д. Д. Мордухай-Болтовского к «Началам» Евклида. На стр. 341 «Начал» Евклида, книги VII—X, ссылаясь на «Теорию чисел» французского математика Люка, Д. Д. Мордухай-Болтовский приводит таблицу:

$$\left.\begin{array}{rr} 1+2= & 3 \\ 1+2\cdot3= & 7 \\ 1+2\cdot3\cdot5= & 31 \\ 1+2\cdot3\cdot5\cdot7= & 211 \\ 1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11= & 2311 \\ 1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13= & 30\,031 \end{array}\right\}\text{ простые числа}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 \\ 1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19 \\ 1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23 \end{array}\right\}\text{ составные числа}$$

Здесь шестая строка содержит ошибку: $30\,031 = 59\cdot509$. Люка («Теория чисел», 1891, стр. 352) этой ошибки не делает и не принимает число 30 031 за простое, а даёт последние четыре строки таблицы в такой форме:

$$1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 = 59\cdot509$$

$$1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 19\cdot97\cdot277$$

$$1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19 = 347\cdot27\,953$$

$$1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23 = 317\cdot703\,763$$

Доказательство, приведённое выше, является доказательством от противного. Можно дать прямое доказательство теоремы о бесконечности ряда простых чисел.

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ простые числа. Число $N=p_1\cdot p_2\cdot p_3\ldots p_n+1$ не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, так как при делении N на любое из этих чисел получается остаток 1. Так как всякое число N имеет по крайней мере один простой делитель p, то этот простой делитель отличен от простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Если множество (p_1, p_2, p_3, ..., p_n) содержит первые n простых чисел натурального ряда, то простой делитель числа — некоторое простое число P — будет больше, чем p_n. Следовательно, за n-м простым числом натурального ряда существует ещё простое число P и $P > p_n$. Ряд простых чисел бесконечен.

Теорема о бесконечности ряда простых чисел называется теоремой Евклида, так как приписывается ему; однако есть указания о том, что теорема эта была известна уже Платону, умершему лет за 25 до рождения Евклида. Евклид родился около 325 г. до н. э.

Историк математики О. Беккер считает, что эта теорема возникла во время Пифагора (VI—V вв. до н. э.).

Л. Эйлер и после него и другие математики дали свои доказательства этой теоремы.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТОТЫ ЧИСЕЛ

Когда было установлено, что натуральный ряд содержит бесконечное количество простых чисел, естественно возник вопрос, как выделить эти числа в натуральном ряду. Первая попытка решения этого вопроса принадлежит Эратосфену [276 (?) — 194 (?) гг. до н. э.] [32].

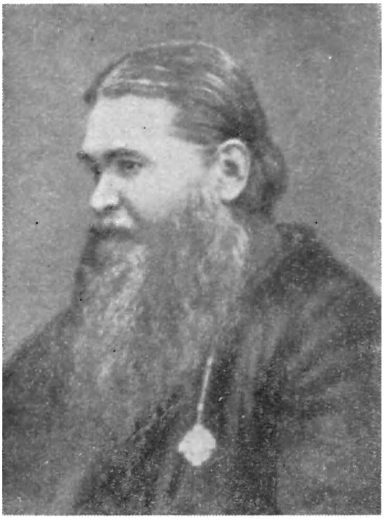
Выписав числа натурального ряда, Эратосфен вычёркивает, начиная от 2, все числа через одно, потом, начиная от 3, все числа через два места в натуральном ряду, затем, начиная от 5, все числа через четыре места и т. д. Все числа, оставшиеся невычеркнутыми перед числом, от которого начинается новое вычёркивание, являются простыми.

Для получения всех простых чисел между 1 и числом N надо довести вычёркивания до такого, которое начинается с простого числа, или равного $\sqrt{N}$, или с простого числа, ближайшего к $\sqrt{N}$ и меньшего его.

Примеры: 1) Найти все простые делители между 1 и 49. $\sqrt{49} = 7$; после вычёркиваний, начинающихся с 2, 3, 5 и 7, остаются простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. 2) Найти все простые числа между 1 и 35. Имеем ı $<35<6$; после вычёркиваний, начинающихся с 2, 3 и 5, остаются невычеркнутыми простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

В эпоху деятельности Эратосфена писали на восковых дощечках. Вместо вычёркивания чисел прокалывали в этом месте дощечку, которая после этого обращалась в решето. Отсюда название способа — «эратосфеново решето».

Примитивная на первый взгляд идея метода Эратосфена в усовершённой форме в настоящее время применяется при решении самых сложных вопросов теории чисел. Важные результаты при помощи этого метода получили как советские, так и зару-



Иван Михеевич Первушин.

бежные математики (И. М. Виноградов, А А. Бухштаб, Вигго Брун и др.).

До конца XVI в. математика не знала никаких иных средств для определения простоты или непростоты числа a, кроме непосредственных проверок делением его на все простые числа $<$ или $= \sqrt{a}$, или составления «решета». Оба эти метода очень утомительны [33]. В течение последующих веков были указаны некоторые приёмы, облегчающие эту проверку, математиками Ферма, Лейбницем, Ламбертом, Эйлером, Гауссом.

Во времена Эйлера (1772 г.) наибольшим известным простым числом было:

$$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647.$$

В 1883 г. сельский священник Шадринского уезда на Урале Иван Михеевич Первушин доказал, что число

$$2^{61} - 1 = 2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$$

есть число простое [34].

До недавнего времени наибольшим известным простым числом считалось:

$$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727.$$

Дальнейшие поиски простых чисел вида 2^n-1 при помощи вычислительных приборов, имевшихся до 1950 г., были невозможны.

Около 1950 г. были изобретены и применены в научных работах электронные счётные машины, которые могут произвести в секунду десятки тысяч и более операций. 30 января 1952 г. при помощи электронной счётной машины было установлено, что простым числом является 157-значное число $2^{521}-1$.

Поиски больших простых чисел продолжаются, и с помощью электронных счётных машин открытия их происходят с поразительной быстротой.

После числа $2^{521}-1=68 \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{(150 промежуточных цифр)}} 57\ 151$
последовало 183-значное число

$$2^{607} - 1 = 531 \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{(175 промежуточных цифр)}} 28\,127.$$

Затем, 21 августа 1952 г., было доказано, что простым числом является 386-значное число:

$$2^{1279}-1=104\,079\underset{}{\overset{\text{(375 промежуточных цифр)}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}29\,087.$$

В октябре того же года было обнаружено, что простыми числами являются

$2^{2203}-1$ и $2^{2281}-1$. Числа эти имеют 700—750 цифр.

По сравнению с этими числами все астрономические числа являются ничтожными карликами.

До изобретения электронных счётных машин самым успешным «охотником за большими простыми числами» был математик Д. Н. Лемер (1867—1938). Он в 1932 г. установил, что число $2^{257}-1$ является составным числом. Пользуясь тогдашними счётными приборами, Лемер для решения вопроса работал целый год. Сын его, Г. Д. Лемер, столь же страстный охотник за большими простыми числами, как и его отец, в январе 1952 г. мог наблюдать, как электронная счётная машина годовую работу прежних счётных приборов выполнила в 48 секунд, подтвердив результат, полученный Лемером за двадцать лет до этого в результате годовой работы. Машина, которой пользовались «охотники» в 1952 г., делала сложение 36-значных чисел двоичной системы в миллионные доли секунды. В настоящее время мощность электронных счётных машин несравненно выше той, которую имела машина в 1952 г.

К концу 1957 г. наибольшим известным простым числом было число $2^{2281}-1$. Но это не предел. Ведь мы знаем, по доказанной выше теореме, что за каждым простым числом в натуральном ряду следуют новые простые числа, и так до бесконечности.

При установлении простоты или непростоты чисел вида 2^n-1 нередко делались ошибки даже выдающимися математиками. Эйлер пишет: «Достославный Вольф во втором издании своей книги «Элементы математики» (1713) причисляет 2047 к простым числам и считает за таковое и 511, хотя

$$511=2^9-1=7\cdot 73 \text{ и } 2047=2^{11}-1=23\cdot 89\,[35].$$

Можно указать, что для многих отдельных больших чисел особенного вида доказана непростота их. Так, например, И. М. Первушин доказал, что составным является число $2^{2^{23}}+1$ и что оно делится на число $5\cdot 2^{25}+1$, которое равно 167 772 161. Число $2^{2^{23}}+1$ состоит из 2 525 223 цифр. Если бы напечатать его обычным шрифтом, то получилась бы строка длиной в 5 километров или книга обыкновенного формата в 1000 страниц.

Результат Первушина был проверен и подтверждён академиком Е. И. Золотарёвым.

В 1957 г. была доказана простота числа $2^{3217}-1$ (около 1000 цифр), а в 1961 г. простота чисел $2^{4253}-1$ и $2^{4423}-1$.

5. ТАБЛИЦЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Методом «решета Эратосфена» и другими составлялись таблицы простых чисел и разложений на простые множители составных чисел натурального ряда.

Итальянский математик Катальди (1603) довёл таблицу до 750, швейцарский математик Ламберт (1770) — до 102 000. Последний сулил бессмертие тому, кто составит такие таблицы чисел до 1 000 000. Задача эта была выполнена Чернаком, и в 1811 г. напечатана таблица в виде громадного тома в 1020 страниц большого формата, дающая разложение на простые множители чисел до 1 020 000.

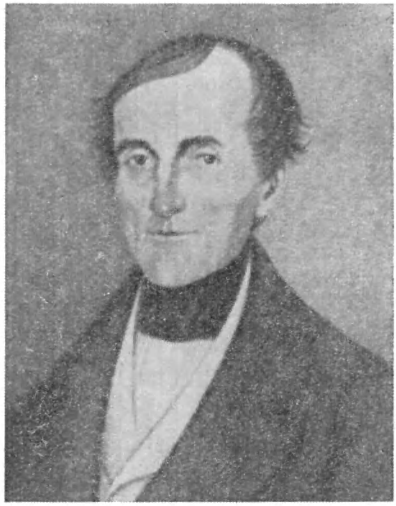
Имеются указания, вызывающие сомнение, что некий Фелькель в XVIII в. составил таблицу делителей чисел до 10 000 000 Верно, что он в 1776 г. напечатал часть своей таблицы, доходившую до 408 000. За отсутствием спроса на подобное издание печатание не было продолжено, и напечатанная книга, за исключением очень небольшого числа экземпляров её, пошла на изготовление патронов для начавшейся в эти годы войны против турок.

На протяжении XIX в. таблицы простых чисел («решето Эратосфена») многими вычислителями были доведены до 10 миллионов. В 1909 г. математиком Лемером была напечатана таблица делителей всех чисел до 10 017 000, составляющая том в 477 страниц (свыше 20 000 типографских знаков на каждой странице). Тем же Лемером в 1914 г. отдельно издана таблица всех простых чисел между 1 и 10 006 721. Истинным героем в составлении таблиц простых чисел является профессор чешского университета в Праге Якуб Филипп Кулик (1793—1863).

Он, не имея никаких видов на печатание своего труда, составил таблицу делителей чисел первых ста миллионов (точнее чисел до 100 330 201) и поместил её в библиотеке Венской Академии наук для пользования работающими в этой области. Известный немецкий математик Якоби охарактеризовал Кулика в следующих словах: «Я нашёл в Вене время от времени появляющийся феномен — человека, который выполняет не только с энтузиазмом, а, вернее сказать, с фанатическим многотерпением, самую ужасную работу, от которой, при одной мысли о ней, волосы становятся дыбом... Кулик является одним из тех людей, которые не только не страшатся никакой самой ужасной вычислительной работы, не сулящей малейшего материального вознаграждения, но готовы отдать всё, что имеют, чтобы видеть свои таблицы напечатанными». Подробности о Кулике можно найти в работе автора настоящей книги («Историко-математические исследования», вып. VI, 1953, стр. 573—609).

С. А. Хороший, работник газетного киоска в Москве до 1935 г., имевший только низшее образование, составил таблицы для нахождения простых делителей чисел до 10 017 000. Рукопись приобретена Математическим институтом Академии наук.

Очень успешно в вопросах о простых числах работает учитель-пенсионер средней школы города Кувшиново Василий Антонович Голубев. Им составлены таблицы простых чисел одиннадцатого и двенадцатого миллионов, представленные в Математический институт Академии наук; им же указаны ошибки в напечатанных за последние годы таблицах простых чисел одиннадцатого миллиона математика Полетти (Италия). Работы В. А. Голубева печатались в «Учёных записках» Калининского педагогического института, в польских, чешских, болгарских и бельгийских математических журналах.



Якуб Филипп Кулик.

Из таблиц простых чисел можно извлечь статистические данные о распределении этих чисел среди чисел натурального ряда. Из отдельных сотен наибольшее число простых чисел (25) содержится в первой сотне; в первой тысяче их 168, в первом десятке тысяч 1229. Частота простых чисел в дальнейшем в общем убывает, но для отдельных тысяч правило убывания не всегда выполняется.

Сведения о распределении простых чисел в первом десятке тысяч помещены в приводимой сводной таблице (см. стр. 138).

Таблица показывает, что во многих случаях последующая сотня содержит больше простых чисел, чем предшествующая. По тысячам убывание идёт более равномерно (последний столбец), но и тут девятая и десятая тысячи обнаруживают не убывание, а увеличение количества простых чисел в тысячах.

В первом миллионе 78 498 простых чисел; в дальнейших миллионах это число всё время убывает. В отдельных сотнях в пределе первых десяти тысяч чаще всего встречается 11 и 12 простых чисел, а в пределе девяти миллионов — по 7 и 8 простых чисел. На том же протяжении числового ряда имеется 24 сотни, не содержащие ни одного простого числа, в то время как в первом десятке тысяч нет ни одной, в которой число простых чисел было бы меньше 7.

Общее представление о распределении простых чисел среди чисел натурального ряда даёт таблица на стр. 139.

Эта таблица подтверждает, что по отдельным миллионам число простых чисел всё время убывает, однако картина оказывается другой, если рассматривать количество простых чисел в

Распределение простых чисел по сотням и тысячам первого десятка тысяч

Тысячи \ Сотни	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	В отдельных тысячах
I	25	21	16	16	17	14	16	14	15	14	168
II	16	12	15	11	17	12	15	12	12	13	135
III	14	10	15	15	10	11	15	14	12	11	127
IV	12	10	11	15	11	14	13	12	11	11	120
V	15	9	16	9	11	12	12	12	8	15	119
VI	12	11	10	10	13	13	12	10	16	7	114
VII	12	11	13	15	8	11	10	11	11	13	115
VIII	9	10	11	9	11	14	13	11	10	10	108
IX	11	10	14	9	7	12	13	11	14	9	110
X	11	13	12	11	14	7	13	11	12	9	113
В первом десятке тысяч простых чисел											1229

последовательных сотнях. Оказывается, например, что в 26 379-й сотне нет ни одного простого числа, а в 27 050-й сотне их 17.

Вообще последовательность простых чисел полна капризов [36].

Существуют пары простых чисел, разность между которыми равна двум, например 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13 и т. д. Такие пары простых чисел называются близнецами. Близнецами были нумера годов 1949 и 1951. Ближайшей такой парой годов-близнецов будут 1997 и 1999. Наибольшей известной парой близнецов является пара 10 999 949 и 10 999 951.

Вопрос о том, существует ли бесконечное число близнецов, остаётся открытым.

С другой стороны, существуют пары последовательных простых чисел, которые отделены в натуральном ряду друг от друга большим, даже сколь угодно большим конечным числом составных чисел. Например, 153 последовательных натуральных числа от 4 652 354 до 4 652 506 все составные.

Некоторые составные числа обладают своеобразными особенностями. Так, например, для числа 30 взаимно простые с ним и меньше его числа, именно 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, все являются простыми числами. Это свойство числа 30 дало возможность использовать его в некоторых доказательствах.

Может возникнуть вопрос, для чего нужно определять, будет ли некоторое число простым или составным. Можно ответить приведением примеров из школьного курса математики, где нужно решать этот вопрос: совершенные числа в арифметике —

Промежуток натурального ряда	Простых чисел в этом промежутке	Простых чисел между 1 и концом промежутка
1	2	3
от 1 до 10	4	4
от 10 до 20	4	8
от 20 до 30	2	10
от 30 до 40	2	12
от 40 до 50	3	15
от 50 до 60	2	17
от 60 до 70	2	19
от 70 до 80	3	22
от 80 до 90	2	24
от 90 до 100	1	25
от 1 до 100	25	25
от 100 до 200	21	46
от 200 до 300	16	62
от 300 до 400	16	78
от 400 до 500	17	95
от 500 до 600	14	109
от 600 до 700	16	125
от 700 до 800	14	139
от 800 до 900	15	154
от 900 до 1000	14	168
Первый миллион	78 498	78 498
Второй »	70 435	148 933
Третий »	67 883	216 816
Четвёртый »	66 330	283 146
Пятый »	65 367	348 513
Шестой »	64 336	412 849
Седьмой »	63 799	476 648
Восьмой »	63 129	539 777
Девятый »	62 712	602 489
Десятый »	62 090	664 579

о них речь в дальнейшем, теория логарифмов в алгебре, правильные многоугольники в геометрии.

Поверим словам Гаусса: «Проблема, в которой предлагается отделить простые числа от составных, а последние разложить на простые множители, известна как одна из самых важных и самых полезных в арифметике. Мне кажется, достоинство науки требует тщательного изучения всех необходимых средств, требуемых для того, чтобы прийти к разрешению столь изящной и знаменитой проблемы» [37].

6. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Наблюдения над таблицами простых чисел привели к заключению, что не существует никакой закономерности в распределении простых чисел среди чисел натурального ряда.

Адриан Лежандр.

Многие авторы искали алгебраических выражений, которые при $n=1, 2, 3...$ давали бы простые числа. Эйлер указал выражение n^2-n+41, которое при $n=0, 1, 2, 3, ..., 39, 40$ даёт 41 простое число. Было указано выражение n^2-79n+ $+1601$ при $n=0, 1, 2, 3, ..., 79$, дающее 80 простых чисел. Поиски алгебраического выражения, которое при всяких значениях n давало бы простое число, оказались безрезультатными.

Уже с XVIII в. учёные искали правило, которое хотя бы приближённо выражало число простых чисел, не превышающих данного числа n.

Французский математик Лежандр в 1798 г. дал такое правило (формулу). В начале XIX в. Гаусс указал для нахождения количества простых чисел между 1 и числом n значительно более точную формулу. Но всё же обе формулы лишь весьма приближённы.

Как эти, так и другие подобные формулы представляли догадки, высказывавшиеся без доказательства. Только П. Л. Чебышеву удалось вывести формулу, которая даёт весьма близкое к действительности количество простых чисел между 1 и натуральным числом n. Вместе с тем он дал гениальный метод решения вопросов теории чисел.

По поводу результатов П. Л. Чебышева известный английский математик Сильвестер сказал, что «Чебышев, победитель простых чисел, первый стеснил их капризный поток в алгебраические границы», и что «дальнейших успехов теории простых чисел можно ожидать тогда, когда родится некто, на столько превосходящий Чебышева своей проницательностью и вдумчивостью, насколько Чебышев превосходит этими качествами обыкновенных людей». Большой специалист в вопросах простых чисел, немецкий математик Э. Ландау, в 1909 г. добавил к этому, что «первый после Евклида Чебышев пошёл правильным путём при решении проблемы простых чисел и достиг важных результатов» [38].

Приближённая формула Чебышева даёт число простых чисел, не превышающих n, вообще несколько большее, чем действительное количество их, которое для чисел в пределе первых 10 миллионов нам известно по таблицам. Отклонения результатов, получаемых по формуле Чебышева, от табличных данных весьма незначительны и убывают по мере возрастания числа n — верхней границы рассматриваемого интервала натурального ряда. Приводимая ниже таблица даёт в первом столбце рассматриваемый участок натурального ряда: от 1 до 10, от 1 до 100, от 1 до 1000 и т. д.; второй столбец содержит точное число простых чисел в соответственном интервале; в третьем столбце указаны количества простых чисел того же интервала, получаемые по формуле Чебышева; числа четвёртого столбца показывают, насколько получаемые по формуле Чебышева числа больше истинных количеств простых чисел в каждом из рассматриваемых интервалов натурального ряда.

В интервале между 1 и числом этого столбца	Простых чисел по таблице	Формула Чебышева даёт	Формула Чебышева даёт больше на
10	4	6	2
100	25	29	4
1 000	168	178	10
10 000	1 229	1 246	17
100 000	9 592	9 630	38
500 000	41 538	41 606	68
1 000 000	78 498	78 628	130
1 500 000	114 149	114 263	114
2 000 000	148 933	149 055	122
2 500 000	183 072	183 245	173
3 000 000	216 816	216 971	155
4 000 000	283 146	283 352	206
5 000 000	348 513	348 638	125
6 000 000	412 849	413 077	228
7 000 000	476 648	476 827	179
8 000 000	539 777	540 000	223
9 000 000	602 489	602 676	187
10 000 000	664 579	664 918	339

Таблица показывает, что отклонения чисел, получаемых по формуле Чебышева, от действительных количеств простых чисел составляют для 500 000 лишь около 0,16%, а для 10 000 000 только 0,05%. Точность формулы Чебышева весьма большая и увеличивается с возрастанием числа n.

Отметим, что в настоящее время доказано следующее неожиданное свойство чисел Чебышева. В натуральном ряду, очень далеко за пределами 10 000 000, существует такое число N, около которого результат, получаемый по формуле Чебышева, оказывается уже не больше, а меньше действительного количества простых чисел. В 1933 г. было установлено, что это имеет место для числа N, которое определяется приближённым равенством:

$$N \approx 10^{10^{10^{34}}}.$$

Это число (так называемое число Скьюиза) является самым большим числом, когда-либо встречавшимся в науке. Оно представляет единицу, за которой следует

$$10^{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \text{ нулей}^{1}.$$

П. Л. Чебышев одновременно разрешил и другую, бывшую нерешённой до этого, задачу. Французский математик Бертран (1822—1900) проверил на всех числах до 6 000 000 существование следующей закономерности: для всех чисел n, начиная с 4, между числами n и $2n - 2$ содержится по крайней мере одно простое число. Это предложение было известно под названием «допущения (постулата) Бертрана». П. Л. Чебышев доказал предложение Бертрана и превратил его в теорему. В настоящее время эта теорема может быть доказана при помощи сведений из программы X класса.

7. ДЕЛИМОСТЬ СОСТАВНЫХ ЧИСЕЛ

Признак делимости чисел на 2 был известен уже древним египтянам по крайней мере около 2000 лет до н. э. Признак делимости на 9 имеется у греков в III в. до н. э., признак делимости на 3 зафиксирован лишь у Леонарда Пизанского (1228) и Иордана Неморария (умер в 1237 г.). Доказательства этих признаков появляются в учебниках лишь в XVIII в. Признаки делимости на 2 и 5 в связи с десятичной системой счисления, конечно, были известны в Индии, но в литературе они впервые появляются у Леонарда Пизанского (1228). Признак делимости на 11 рассматривает араб ал-Кархи (около 1010 г.), делая проверку действий при помощи числа 11. В учебники признак делимости на 11 вошёл впервые в книге Карстена (1767), а после выхода лекций по элементарной математике Лагранжа (1794) и в разные другие учебники. Признаки делимости на 7 и 8 подробно рассматривает марокканец ибн-Албанна в XIII в.

Общий признак делимости для любого числа даёт впервые Паскаль (1654).

Понятие о взаимно простых числах восходит к раннему периоду пифагорейской школы (VI в. до н. э.). Определение таких чисел имеется в «Началах» Евклида (кн. VII, 12). Для нахождения наибольшего общего делителя там же Евклид даёт свой алгорифм (последовательное деление).

Так как в стабильном учебнике арифметики нахождение наибольшего общего делителя последовательным делением не рассматривается, а алгорифм Евклида играет в математике очень большую роль, то скажем здесь об этом.

---

[1] Дж. Литлвуд, Математическая смесь, М., 1962.

Легко доказывается, что наибольшим общим делителем двух чисел является последний, отличный от нуля, остаток при последовательном делении этих чисел. Под последовательным делением подразумевается деление большего числа на меньше, меньшего числа на первый остаток, первого остатка на второй остаток, второго остатка на третий и т. д., пока деление не закончится без остатка, что, как легко доказать, всегда имеет место. Вычисление вместо неудобного расположения действий, даваемого в учебниках, желательно производить следующим образом. Положим, требуется найти наибольший общий делитель чисел 1679 и 345. Производим последовательное деление так:

	4	1	6	2
1679 1380	345 299	299 276	46 46	23
299	46	23	0	

Последний делитель или последний, отличный от нуля, остаток 23 и будет искомым наибольшим общим делителем чисел 1679 и 345.

Способ последовательного деления проникает в Индию или открывается там независимо от греков. Индийский математик XII в. Бхаскара применяет его для нахождения одной пары целых решений неопределённого уравнения первой степени с двумя неизвестными, совершенно аналогично нашим современным приёмам. У Евклида же имеется (кн. VII) понятие о наименьшем общем кратном двух чисел.

Особенно существенной для дальнейшего развития учения о числах является 30-е предложение книги VII Евклида, утверждающее, что если произведение двух чисел делится на простое число, то по крайней мере одно из этих чисел должно делиться на указанное простое число. В этом предложении содержится сущность простого числа, и оно привело к созданию в XIX в. высших разделов теории чисел.

Относительно делителей составного числа решались разные вопросы. Комментатором сочинений Ньютона Кастиллиони (1761) была найдена формула для определения числа всех делителей составного числа. Если число N разлагается на простые множители так, что

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k},$$

то число всех делителей его равняется: $(a_1+1)\ (a_2+1)\ (a_3+1) \ldots (a_k+1)$.

Джон Валлис (Уоллис).

Пример: $10=2\cdot5$; число делителей десяти: $(1+1)\ (1+1)=4$; они суть: 1, 2, 5, 10. Число $12=2^2\cdot3$; число делителей его: $(2+1)\ (1+1)=6$; они суть: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Другим вопросом, подобным рассмотренному, является вопрос о сумме всех делителей данного числа. В руководствах теоретической арифметики доказывается, что сумма всех делителей числа N, которое разлагается на простые множители следующим образом:

$$N = p^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot p_\kappa^{a_\kappa},$$

равна:

$$\frac{P_1^{a_1+1}-1}{P_1-1}\cdot\frac{P_2^{a_2+1}-1}{P_2-1}\cdot\frac{P_3^{a_3+1}-1}{P_3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{P_\kappa^{a_\kappa+1}-1}{P_\kappa-1}.$$

Формулу эту приводит Валлис (Уоллис) в 1658 г.

Пример: $12=2^2\cdot3$; сумма его делителей равна:

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}=7\cdot4=28.$$

Действительно, делители числа 12 суть: 1, 2, 3, 4, 6, 12; сумма их: $1+2+3+4+6+12=28$.

Пифагорейцы называли два числа дружественными, если каждое из них равно сумме делителей другого (исключая из числа делителей само число). Существовало предание, что Пифагор на вопрос: что такое дружба? ответил: 220 и 284. Эти числа действительно являются дружественными в смысле учения пифагорейцев.

$220=2^2\cdot5\cdot11$; сумма всех его делителей;

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}\cdot\frac{11^2-1}{11-1}=7\cdot6\cdot12=504;$$

исключая само число 220, получим: $504-220=284$.

$284=2^2\cdot71$; сумма всех его делителей:

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{71^2-1}{71-1}=7\cdot72=504,$$

вычитая из суммы само число 284, имеем: $504-284=220$.

Можно проверить правильность формулы для определения суммы делителей и на этом примере.

Делители числа 220, исключая само число, следующие: 1, 2. 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

Делители числа 284, исключая само число: 1, 2, 4, 71, 142;

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220;$$

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Вопросом о дружественных числах занимались Ферма, Декарт и Эйлер, который указал 64 пары дружественных чисел, из которых некоторые были ранее известны. Занимались этим вопросом и современные математики и нашли много дальнейших пар их [39].

8. СОВЕРШЕННЫЕ, НЕДОСТАТОЧНЫЕ И ИЗБЫТОЧНЫЕ ЧИСЛА

Греческие математики, в частности Евклид (кн. VII, стр. 22), называли число совершенным, если сумма всех его делителей (исключая само число) равна этому числу. Им были известны четыре таких числа: 6, 28, 496, 8 128. Легко проверить, что эти числа соответствуют определению совершенного числа:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Пользуясь указанной в предыдущей главе формулой для нахождения суммы всех делителей числа, можно проверить, что числа 496 и 8128 суть совершенные числа.

Для числа 496 имеем: $496 = 2^4 \cdot 31$; сумма всех его делителей равна:

$$\frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{31^2 - 1}{31 - 1} = 31 \cdot 32 = 992;$$

сумма делителей числа 496 без самого числа: $992 - 496 = 496$.

Числа, сумма делителей которых больше или меньше самого числа, назывались греческими авторами соответственно избыточными и недостаточными. Так, например, число 12 — избыточное, а число 8 — недостаточное: сумма делителей числа 12 больше самого числа: $1+2+3+4+6=16$, сумма делителей 8— меньше 8: $1+2+4=7$.

Греческий математик I в. н. э. Никомах Геразский пишет: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи рéдки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными являются подавляющее большинство чисел, в то время как совершенных чисел немного.

Среди единиц (однозначных чисел) их только одно — 6, среди десятков (двузначных), сотен (трёхзначных) и тысяч (четырёхзначных) их тоже по одному: 28, 496, 8128. Характерно для них, что они попеременно оканчиваются на 6 и 8».

Совершенные числа встречаются в греческих преданиях. В сказочном государстве золотого века, в Атлантиде, описанном Платоном в разных местах его диалогов, особенно в диалоге «Тимей», в разных установлениях фигурирует преимущественно число 6. В наши дни в Риме, при постройке метро, под землёй была обнаружена странная комбинация помещений: общий зал и вокруг него 28 келий, выходящих в этот зал. Оказалось, что это помещение неопифагорейской академии, которая существовала в Риме в первые века нашей эры. Очевидно, что в академии этой было 28 членов. В некоторых обществах (академиях) до нашего времени по когда-то установленному положению, обоснования которого ныне уже никто не знает, имеется 28 действительных членов, подобно тому, как во французской «Академии бессмертных» их сорок. По-видимому, при установлении такого числа членов основанием является тот факт, что число 28 — совершенное число.

У римлян на пирах самым почётным местом было шестое (6 — совершенное число), на котором, по сатире Горация, возлежал Меценат, благодетель Горация (см. «Римская сатира», М., 1957, стр. 299).

Евклид в книге IX «Начал» (предложение 36) доказывает теорему: если сумма $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$, равная $2^{n+1}-1$, есть число простое, то число

$$N=(1+2+2^2+2^3+\ .\ .\ .+2^n)\cdot 2^n,$$

равное $2^n\cdot(2^{n+1}-1)$, есть число совершенное. Это предложение считается венцом, последним достижением арифметических книг Евклида.

Эйлер доказывает обратную теорему: всякое чётное совершенное число имеет вид: $2^n\cdot(2^{n+1}-1)$, где $2^{n+1}-1$ есть число простое.

Вопрос о том, существуют ли вообще нечётные совершенные числа, остаётся до сих пор нерешённым, хотя Декарт уверял, что решит вопрос о их существовании, если будет иметь 3 месяца «творческого отпуска». Однако прошло с тех пор более трёхсот лет, очень многие математики занимались вопросом о нечётных совершенных числах, но к никаким доводам ни за, ни против существования таких чисел не пришли. В пользу мнения о том, что таких чисел нет, можно привести лишь довод, что если бы они существовали, то, наверное, были бы уже обнаружены; однако этот довод не является убедительным. Очень многие математики (из советских А. С. Турчанинов, И. С. Градштейн) устанавливали свойства таких чисел, если они существуют.

Легко доказывается, что все чётные совершенные числа оканчиваются либо цифрой 6, либо цифрой 8, но утверждение Никомаха о том, что они попеременно оканчиваются цифрами 6 и 8, оказалось неверным, как видно из приведённой ниже таблицы известных в настоящее время совершенных чисел. Неправильное утверждение Никомаха, повторенное в дальнейшем очень многими авторами, является одним из ошибочных многочисленных примеров заключений по аналогии и по неполной индукции, т. е. только на основании имеющихся перед глазами таблиц известных в данный момент случаев. Такие выводы очень много раз приводили к ошибкам [40].

Ренэ Декарт.

Занимались совершенными числами очень многие математики, в том числе Ферма, Декарт, Мерсенн, Эйлер, Сильвестер. Чезаро, Каталан. В настоящее время известно совершенных чисел 20:

1) $6=2\cdot(2^2-1)=2\cdot3;$
2) $28=2^2\cdot(2^3-1)=4\cdot7;$
3) $496=2^4\cdot(2^5-1)=16\cdot31$
4) $8128=2^6\cdot(2^7-1)=64\cdot127.$

Эти четыре совершенных числа были известны древним.

5) $33\ 550\ 336=2^{12}\cdot(2^{13}-1)=2^{12}\cdot8191;$

6) $8\ 589\ 869\ 056=2^{16}\cdot(2^{17}-1)=2^{16}\cdot131\ 071.$

Пятое и шестое известны как совершенные числа Региомонтану в XV в., доказательство дал Эйлер.

7) $137\ 438\ 691\ 328=2^{18}\cdot(2^{19}-1)=2^{18}\cdot524\ 237.$

Шестое и седьмое числа указал Катальди в XVI в., привёл доказательства Эйлер.

8) $2\ 305\ 843\ 008\ \ 139\ 952\ \ 128=2^{30}\cdot(2^{31}-1)=2^{30}\cdot2\ 147\ 483\ 647,$ доказал Эйлер.

9) $2^{60}\cdot(2^{61}-1)=2^{60}\cdot2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$ (Первушин, 1883; число это имеет 37 цифр);

10) $2^{88}\cdot(2^{89}-1)=2^{88}\cdot618\ 970\ 019\ 642\ 690\ 137\ 449\ 562\ 111$ (Тарри, Поуэрс, 1911; 54 цифры);

11) $2^{106}\cdot(2^{107}-1)=2^{106}\cdot162\ 259\ 276\ 829\ 213\ 363\ 391\ 578\ 010\ 288\ 127$ (Фокамберг, Поуэрс, 1914; 65 цифр);

12) $2^{126} \cdot (2^{127} - 1) = 2^{126} \cdot 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$ (Люка, 1876, Фокамберг, 1914; 77 цифр).

До 1952 г. были известны только эти 12 совершенных чисел.

Вторые множители правых частей равенств согласно определению совершенных чисел должны быть числами простыми. Доказательство простоты этих колоссальных чисел, начиная с восьмого, и составляло трудность нахождения дальнейших совершенных чисел.

В предыдущих главах было рассказано о том, что в 1952 г. при помощи электронных счётных машин было найдено несколько больших простых чисел вида $2^n - 1$. Они дали новые совершенные числа:

13) $2^{520} \cdot (2^{521} - 1)$ (в числе 314 цифр);
14) $2^{606} \cdot (2^{607} - 1)$ (366 цифр);
15) $2^{1278} \cdot (2^{1279} - 1)$ (770 цифр);
16) $2^{2202} \cdot (2^{2203} - 1)$ (1327 цифр);
17) $2^{2280} \cdot (2^{2281} - 1)$ (1373 цифры).

В сентябре 1957 г. было найдено (Ризель) совершенное число: 18) $2^{3216} \cdot (2^{3217} - 1)$ (1937 цифр).

А. Гурвиц в 1961 г. нашёл: 19) $2^{4252} \cdot (2^{4253} - 1)$; 20) $2^{4422} \cdot (2^{4423} - 1)$.

Все сведения о совершенных числах, имеющиеся в ряде книг и статей по этому вопросу[1], как основывающиеся на старых источниках, содержат неточности и являются неполными.

Так как в книгах и статьях по теоретической арифметике встречается термин «числа Мерсенна»[2], то отметим, что числа $2^p - 1$, являющиеся вторыми множителями совершенных чисел, называются числами Мерсенна при $p \leqslant 257$ и при p простом. Они представляют интерес, помимо связи их с совершенными числами.

Простых чисел p, не превышающих 257, всего 55. При 12 из этих значений числа Мерсенна $2^p - 1$ суть числа простые, именно для значений: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127. Они дают известные нам выше указанные первые 12 совершенных чисел.

Может возникнуть мысль, с какой целью столько математиков, в том числе очень известных, во все времена занимались вопросом о совершенных числах.

Вот некоторые высказывания по этому поводу.

П. Барлоу (автор распространённых таблиц) в своей теории чисел (1811) пишет: «Трудность нахождения совершенных чисел зависит от трудности установления простоты чисел вида

---

[1] Сводка сведений о совершенных числах до 1952 г. дана в статье: И. Я. Депман, Применение электронных счётных машин для отыскания совершенных чисел, «Математическое просвещение», 1961, № 6, стр. 324.

[2] Французский математик (1588—1648), оставивший значительный след в науке.

2^p—1. Эйлер показал, что $2^{31}-1=2\,147\,483\,647$ есть простое число, и это является наибольшим ныне известным простым числом. Зависящее от него совершенное число есть вместе с тем наибольшее известное совершенное число и, вероятно, наибольшее из них, которое когда-либо будет известно. Так как эти числа только курьёзны, не будучи полезными для чего бы то ни было, то не является правдоподобным, чтобы кто-нибудь стал делать попытку найти дальнейшие».

Эдмунд Ландау (1877—1938) в своей «Элементарной теории чисел» (изд. 1946 г.) говорит:

«Древняя идея о совершенном числе и связанные с этим вопросы не имеют особого значения, и я касаюсь этой материи лишь в связи с тем, чтобы указать на две проблемы, остающиеся нерешёнными до сих пор (написано в 1927 г.):

— Имеется ли бесконечное множество чётных совершенных чисел?

— Не знаю.

— Имеется ли бесконечное число нечётных совершенных чисел?

— Я даже не знаю, существует ли одно такое число.

Но я прошу читателя не углубляться в эти вопросы. Он при изучении этой книги встретит достаточное количество гораздо более обещающих и трудных проблем».

Американский математик Э. Т. Белл писал (1933): «Возникает интересный и крайне трудный вопрос о нахождении простых чисел 2^n—1 сверх двенадцати чисел Мерсенна. Можно ли по этому вопросу утверждать что-нибудь более общее? Если вы знаете, шепните это кой-кому из математиков, и вы можете быть уверены, что найдёте ухо, которое это с удовольствием подслушает...»

Если вопрос о совершенных числах не находит практического значения, то не делается ли из этих чисел какое-нибудь теоретическое применение?

Можно сказать, что изучение совершенных чисел преследует общую цель арифметики — изучение свойств числа.

Пятнадцатое совершенное число $2^{1278}\cdot(2^{1279}-1)$ состоит из 770 цифр: 5 416 252 628 (750 промежуточных цифр) 4 984 291 328.

В этом числе встречаются:

цифра	0—67	раз	цифра	5—80	раз
»	1—74	раза	»	6—76	»
»	2—84	»	»	7—76	»
»	3—73	»	»	8—69	»
»	4—84	»	»	9—87	»

При равномерном распределении цифр каждая из них повторялась бы 77 раз. Как видим, наблюдаемая частота повторения отдельных цифр в нашем 770-значном конкретном числе довольно близка к частоте при равномерном распределении цифр.

Такие наблюдения над распределением отдельных цифр и в других числах производились, например, в выражении числа π, для которого к настоящему времени электронной счётной машиной найдено 10 000 цифр; для числа e известно примерно столько же.

Оказалось, что с увеличением числа цифр приближённого значения того или другого числа частота появления в нём отдельных цифр стремится к частоте равномерного распределения.

Заниматься этими вопросами находил смысл очень крупный французский математик, член Парижской Академии наук Э. Борель (1871—1956) в последние годы своей жизни. На вопрос, для чего изучаются числа, рассмотренные выше, которые не имеют непосредственно практического применения (нахождение нескольких тысяч цифр числа π, совершенные числа и др.), можно ответить, что при изучении их вырабатываются методы, которые могут оказаться полезными для решения вопросов, имеющих практическое значение. Знание, кажущееся неприменимым в данный момент, может оказаться применимым в будущем. Об этом красочно пишет академик А. Н. Крылов в брошюре «Прикладная математика и её значение для техники».

Вся история арифметики показывает, что эту науку совершенствовали не только для непосредственных практических надобностей.

9. МНОГОУГОЛЬНЫЕ И ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

В предыдущих параграфах цифры назывались фигурами. Так, название нуля произошло от слов nulla figura — никакая фигура (цифра). Такое употребление слова «фигура» возникло в Греции, где, начиная с пифагорейцев, математики увлекались числами, связанными с геометрическими образами. Числа эти назывались многоугольными (полигональными).

Простейшими из многоугольных являются треугольные числа. Так назывались числа последовательности

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$$

Они геометрически получаются из треугольника, образованного точками, как показано на чертеже, беря 1 точку (вершина треугольника), первый наименьший треугольник (3 точки), следующий больший треугольник (6 точек) и т. д.

Высказано предположение, что к рассмотрению треугольных чисел человек мог прийти из наблюдения над стаями птиц, которые при перелётах располагаются такими треугольниками. Это предположение высказал французский математик Люка, и её перенёс в нашу учебную литературу К. Н. Рашевский в своём учебнике алгебры (изд.

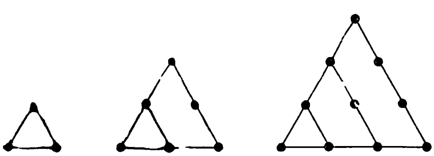


Рис. 53. Треугольные числа.

1930 г., стр. 235). Он даёт и изображение треугольника, из которого получаются треугольные числа, но даёт треугольник прямоугольный.

Тут делается биологическая ошибка. Каждый, видевший перелёт журавлей (автор книги в пастушеский период своей жизни много раз наблюдал улетавших журавлей и сопровождал их трогательной эстонской песенкой), знает, что журавли при перелёте располагаются не прямоугольным, а равносторонним (приблизительно) треугольником, как изображено на чертеже. Биологи, к которым автор книги обращался с вопросом о форме «треугольника журавлей», подтвердили это.

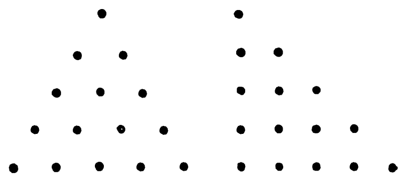


Рис. 54. Треугольник, в котором строятся при перелётах птицы. Второй треугольник — в котором они не летают.

Квадратным назывались числа последовательности 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,... Происхождение этой последовательности ясно из чертежа. Таким же образом из пятиугольников получаются числа пятиугольные:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,...

из шестиугольника — шестиугольные числа и т. д.

Числа натурального ряда можно располагать в соответственных фигурах таким образом, что в первом ряду оказываются многоугольные числа, как показано на чертеже 56. Такое расположение выделяет последовательности многоугольных чисел из остальных чисел и выдвигает эти последовательности на особое место.

Как получаются арифметически многоугольные числа?

Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5,..., n, ... начинается от еди-

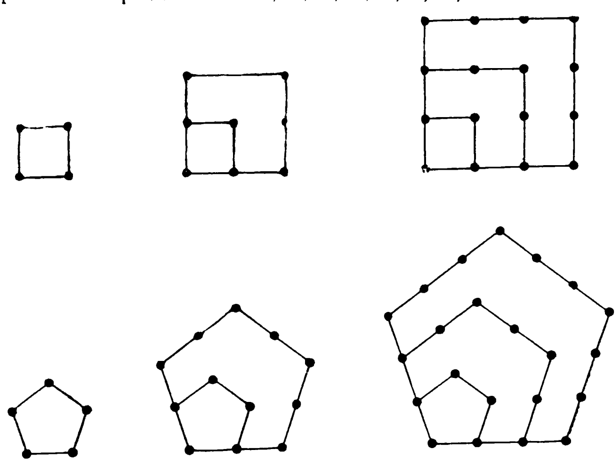


Рис. 55. Четырёхугольные и пятиугольные числа.

ницы; все последующие числа получаются прибавлением к предшествующему числу по единице. Естественно прийти к мысли составить последовательности, начиная от единицы и образуя дальнейшие числа прибавлением к предшествующему числу по 2, по 3, по 4 и т. д. Образуются последовательности:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	. . . . ,	n,	. . .
1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	. . . . ,	$2n-1$,	. . .
1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	. . . . ,	$3n-2$,	. . .
1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	. . . . ,	$4n-3$,	. . .
1,	6,	11,	16,	21,	26,	31,	. . . . ,	$5n-4$,	. . .
1,	7,	13,	19,	25,	31,	37,	. . . . ,	$6n-5$,	. . .

Находя суммы одного, двух, трёх и т. д. чисел предыдущих последовательностей, получим:

1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	. . .	треугольные числа
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	. . .	квадратные »
1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	. . .	пятиугольные »
1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	. . .	шестиугольные »
1,	7,	18,	34,	55,	81,	112,	. . .	семиугольные »
1,	8,	21,	40,	65,	96,	133,	. . .	восьмиугольные »

и т. д. многоугольные числа разных порядков.

Эти числа встречаются у пифагорейцев (VI в. до н. э.) и затем у последующих греческих математиков (Эратосфен, Гипсикл). Особенно подробно изучали их математики первых веков нашей эры: Никомах, Теон Смирнский (II в.) и их современники. Дань этому увлечению отдавал и отец греческой алгебры Диофант (III—IV вв. н. э.), написавший о них целую книгу, дошед-

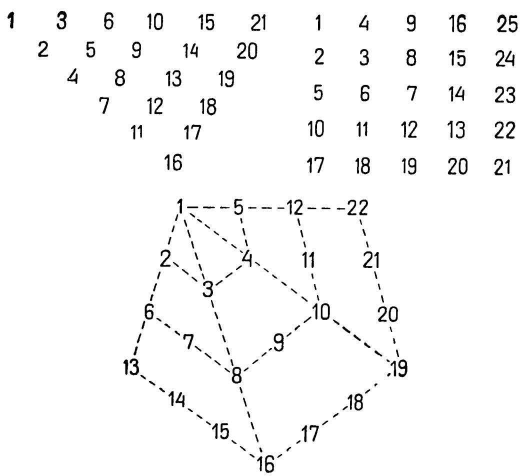


Рис. 56. Одно из объяснений возникновения интереса к многоугольным числам.

шую до нас. Независимо от греческих математиков многоугольными числами занимались индийские математики.

Греческие математики нашли разные свойства многоугольных чисел, которые в большинстве случаев доказывались на фигурах. Приведём пример таких доказательств.

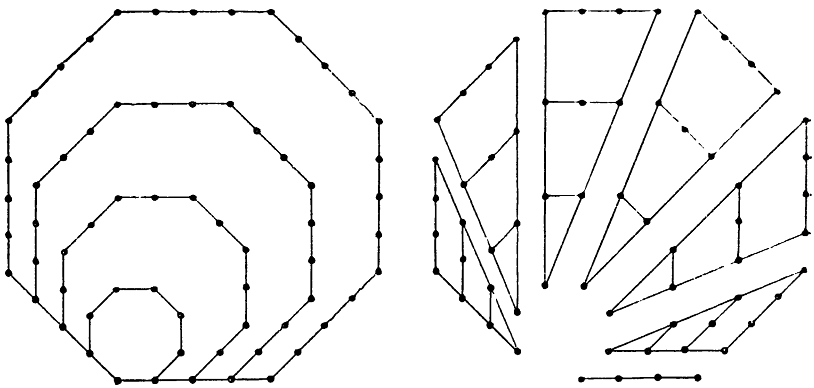


Рис. 57. Восьмиугольные числа и их свойство.

Теорема. Доказать, что n-е восьмиугольное число равно сумме шести $(n-1)$-х треугольных чисел плюс n.

Правильность теоремы видна из таблицы: второе восьмиугольное число $8=6\cdot1+2$, третье: $21=6\cdot3+3$, четвёртое: $40=6\cdot6+4$, пятое: $65=6\cdot10+5$ и т. д.

Для доказательства достаточно построить чертёж и сказать, по образцу индийских руководств: смотри!

Очень трудные теоремы о многоугольных числах доказывали Ферма (XVII в.), Эйлер и Лагранж (XVIII в.), Гаусс (XIX в.) и др. Эти теоремы играли и играют большую роль в высшей арифметике.

Самой важной из этих теорем является теорема, которую Ферма назвал «золотой»: всякое натуральное число есть или треугольное или сумма двух или трёх треугольных чисел; или квадратное или сумма двух, трёх или четырёх квадратных чисел; или пятиугольное или сумма двух, трёх, четырёх или пяти пятиугольных чисел и т. д. Ферма не мог дать доказательства этой теоремы, вытекающей, по его словам, «из многих крайне сокрытых тайн чисел». Пройдя через руки Эйлера, Лагранжа, Лежандра и Гаусса, теорема Ферма была полностью доказана французским математиком Коши (1789—1857). Из этой теоремы вытекают многие важные предложения теории чисел.

Фигурными числами у европейских математиков назывались коэффициенты членов степеней бинома $(a+b)^n$ при $n=1$, 2, 3, 4,...:

$$(a+b)^1 = 1\,a + 1\,b$$

$$(a+b)^2 = 1\,a^2 + 2\,ab + 1\,b^2$$

$$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + 1\,b^3$$

$$(a+b)^4 = 1\,a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4\,ab^3 + 1\,b^4.$$

Составим таблицу:

0	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Первый столбец и первая строка представляют 0, 1, 1, 1,..., второй столбец и вторая строка являются натуральным рядом. Остальные числа таблицы, например 15, 20, суть суммы чисел, стоящих в той же строке влево и в том же столбце над искомым числом: $15=5+10$, $20=10+10$ и т. д. По косым линиям стоят коэффициенты I, II, III, IV и т. д. степеней $(a+b)$. Эта таблица была у Стифеля в 1544 г., у Паскаля в 1665 г. и у нас носит название «треугольника Паскаля». В Германии чаще его называют «треугольником Стифеля», в Италии — «треугольником Тартальи».

Такой числовой треугольник имеется у Омара Хайяма, и нам естественно называть его «треугольником Омара Хайяма».

Индийские историки-математики (в частности, А. Н. Сингх) утверждают, что числовой треугольник был известен в Индии во II в. до н. э. и что математик Махавира в IX в. пишет об этом. Последний рекомендует составить числовой треугольник следующим образом.

Составляется треугольник из клеток: сначала чертится одна клетка, под ней две так, чтобы половины клеток выступали из-под

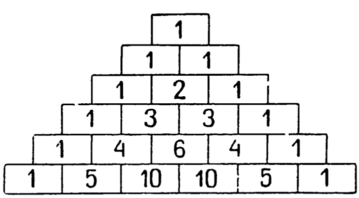


Рис. 58. Индийский способ составления «треугольника Паскаля».

первой, потом три клетки, чтобы опять половины крайних клеток выступали из-под клеток второго ряда, и т. д. В крайние левые и правые клетки каждого ряда вписываются единицы, в каждую из остальных клеток — сумма чисел, стоящих в двух, находящихся над ней, клетках. Такое построение числового треугольника является более удобным, чем показанный в предыдущей фигуре способ Паскаля.

В курсе алгебры числовой треугольник является весьма полезным практическим пособием для составления последовательностей коэффициентов членов развёрнутого выражения $(a+b)^n$ при различных значениях n. Индийский теоретик стихосложения Пингала (II в. до н. э.) пользовался числовым треугольником при решении вопросов своей специальности.

10. СУММИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА И ИХ СТЕПЕНЕЙ

Вавилонские, египетские и греческие математики находили для произвольного натурального числа n суммы:

$$1+2+3+4+\ \ldots\ +n,$$

$$2+4+6+8+\ \ldots\ +2n,$$

$$1+3+5+7+\ \ldots\ +2n-1,$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ \ldots\ n^2,$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ \ldots\ +n^3.$$

В последующие века были найдены такие же суммы:

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\ \ldots\ +n^4,$$

$$1^5+2^5+3^5+4^5+\ \ldots\ +n^5,$$

. . . .

. . . .

Покажем, как это делалось или как это могло быть сделано, так как в ряде случаев мы знаем только, что соответственная формула была известна, но не знаем, как она была получена.

а) Сумма n первых натуральных чисел

$$1+2+3+\ \ldots\ +n$$

Изобразим числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответственным числом квадратов, как показано на чертеже. Соединяя эти фигуры чисел от 1 до 7, получаем фигуру, изображающую сумму чисел $1+2+\ldots+7$. Число клеток в построенной фигуре равно сумме чисел $1+2+3+\ \ldots+7$.

Если начертить две такие фигуры и соединить их так, как показано на чертеже, то получим прямоугольник, у которого одна сторона (основание) содержит 8 клеток, другая сторона (высота) — 7 клеток. Всего в нашей фигуре $7 \cdot 8$ клеток.

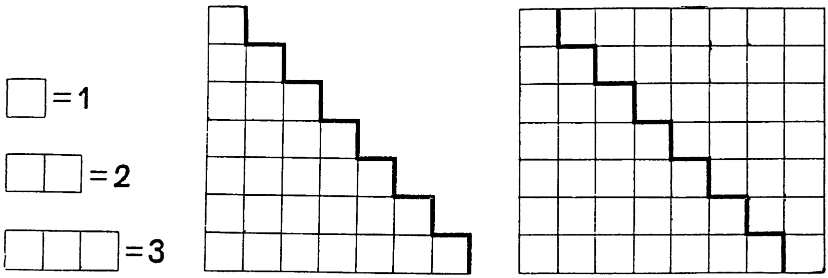


Рис. 59.

Так как наш прямоугольник получился соединением двух треугольных фигур, то он изображает двойную сумму чисел $1+2+3+\ldots+7$. Следовательно,

$$1+2+3+\ .\ .\ .7=\frac{7\cdot 8}{2}.$$

Очевидно, что построение, выполненное нами для суммы первых 7 чисел натурального ряда, может быть сделано для любого количества первых чисел натурального ряда. Поставив вместо цифры 7 букву n, имеем:

$$1+2+3+\ .\ .\ .+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Правило: для получения суммы n первых чисел натурального ряда надо число n умножить на следующее за ним натуральное число и произведение разделить на 2.

Так,

$$1+2+3+\ .\ .\ .+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050,$$

$$1+2+3+\ .\ .\ .+200=\frac{200\cdot 201}{2}=20\,100 \text{ и т. д.}$$

Про Гаусса рассказывают, что он в шестилетнем возрасте открыл указанное выше правило. Он записал числа от 1 до 100, сумму которых нужно было найти, два раза следующим образом:

$$1+2+3+4+\ .\ .\ .+98+99+100,$$

$$100+99+98+97+\ .\ .\ .+3+2+1.$$

Складывая по столбцам, Гаусс обнаружил, что числа каждого столбца в сумме дают 101. Столбцов 100, поэтому в общей сумме получится $100 \cdot 101$; это произведение надо разделить на два, так как слагаемые числа были написаны дважды. В результате шестилетний математик сделал первое из своих многочисленных и очень важных открытий, именно, что

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{[1]}.$$

б) Сумма n первых чётных чисел

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) =$$
$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Числа вида $n\ (n+1)$ пифагорейцы называли гетеромекными. Аристотель в своей «Метафизике» в таблице десяти противоположностей пифагорейцев рядом с противоположностями «конечное и бесконечное, единое и многое, покой и движение, чётное и нечётное» ставит «квадратное и гетеромекное число». Смысл самого слова неизвестен. Ганкель полагает, что пифагорейцы под противоположностями «квадратное и гетеромекное число» понимали противопоставление рационального и иррационального числа.

в) Сумма n первых нечётных чисел

$$1+3+5+ \ldots (2n-3)+(2n-1)$$

Первое нечётное число 1 может быть представлено так: $2 \cdot 1 - 1$, второе нечётное число $3=2 \cdot 2 - 1$, третье нечётное число $5=2 \cdot 3-1$ и т. д.; n-е нечётное число $2n-1$, $(n-1)$-е нечётное число:

$$2(n-1) - 1 = 2n - 2 - 1 = 2n - 3.$$

Изобразим нечётные числа 1, 3, 5, 7, 9 фигурами, показанными на чертеже. Беря первые 5 нечётных чисел, составим из изображающих их фигур новую, дающую сумму этих чисел. Получили квадрат, содержащий $5^2=25$ квадратов $(1+ +3+5+7+9=25)$.

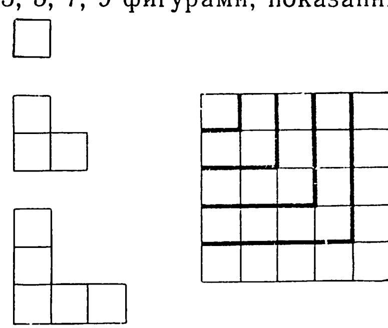


Рис. 60.

Выполненное нами построение можно применить к любому количеству первых нечётных чисел натурального ряда. Приходим к правилу:

---

[1] По другому источнику шестилетний Гаусс вычислил так сумму: $1+2+3+ \ldots +49+50$.

сумма любого количества n нечётных чисел натурального ряда, начиная с единицы, равна квадрату числа слагаемых:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Так, сумма первых 50 нечётных чисел:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 99 = 50^2 = 2500;$$

сумма первых 100 нечётных чисел:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 199 = 100^2 = 10\,000 \quad [41].$$

Можно получить только что найденное правило, используя полученный в пункте (а) результат.

Выполним по столбцам сложение суммы n первых чисел натурального ряда и суммы $(n—1)$ первых чисел того же ряда:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n - 1) + n,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n - 2) + (n - 1).$$

Получим:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1),$$

т. е. сумма n первых нечётных чисел натурального ряда есть сумма суммы первых n и суммы первых $(n—1)$ чисел натурального ряда. Так как сумма n первых чисел натурального ряда есть $\frac{n(n+1)}{2}$, а сумма $(n—1)$ первых чисел того же ряда $\frac{(n-1)n}{2}$, то сумма n первых нечётных чисел натурального ряда $1+3+5+7+\ldots+(2n—1)$, которая равна сумме:

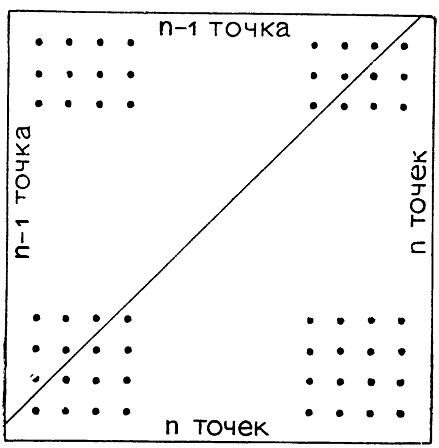


Рис. 61.

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Получено вновь найденное правило.

Теон Смирнский (II в. н. э.) доказал графически об-

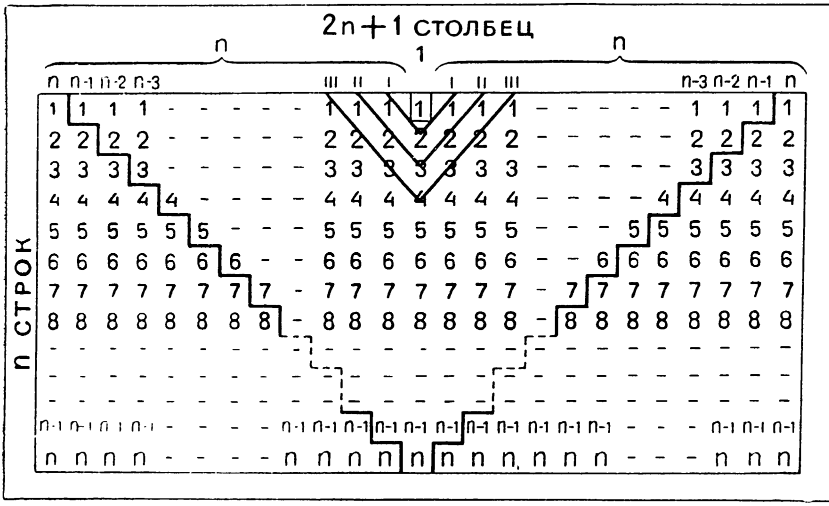


Рис. 62.

ратную теорему: всякое квадратное число n^2 есть сумма сумм:

$$(1+2+3+\ \ldots\ +n)+(1+2+3+\ \ldots\ +n-1).$$

Для доказательства достаточно квадрат из точек, изображающих данное число n^2, разрезать на 2 прямоугольных треугольника, у одного из которых катеты содержат по n точек, у другого по $(n-1)$. Имеем:

$$n^2=(1+2+3+\ \ldots\ +n)+(1+2+3+\ \ldots\ +n-1).$$

г) Сумма квадратов первых n чисел

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ \ldots\ +n^2.$$

Нахождение этой суммы при помощи чертежа возможно, но сложнее, чем при помощи других рассуждений.

Составим следующую прямоугольную числовую таблицу, в которой n строк и $(2n+1)$ столбцов. В каждом столбце сверху вниз идут числа натурального ряда, начиная с единицы. Известно, что сумма чисел каждого столбца:

$$1+2+3+\ \ldots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Так как всех столбцов $2n+1$, то сумма всех чисел нашей таблицы:

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Разделим таблицу ломаной линией на 3 части, как показано на чертеже. Очевидно, что правая и левая части таблицы под ломаной одинаковы. Вычислим сумму чисел, стоящих в каждой из частей таблицы. В левой части под ломаной имеем, рассматривая числа по строкам:

$$
\begin{array}{r}
1 = 1^2 \\
2 + 2 = 4 = 2^2 \\
3 + 3 + 3 = 9 = 3^2 \\
4 + 4 + 4 + 4 = 16 = 4^2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
\underbrace{n + n + \ldots + n}_{n \text{ раз}} = n \cdot n = n^2.
\end{array}
$$

Значит, числа левой части таблицы под ломаной дают в сумме

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Такова же сумма чисел правой части таблицы под ломаной.

Найдём сумму чисел, стоящих над ломаной. Складываем их по ломаным I—I, II—II, III—III и т. д. Имеем:

в среднем столбце		1
по ломаной	I—I	$1+2+1$,
по ломаной	II—II	$1 + 2 + 3 + 2 + 1$,
» »	III—III	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$,
. . . .		. . . .
по ломаной	$(n-1)-(n-1)$	$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$.

В пункте в) мы установили, что

$$[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n] + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] = n^2,$$

поэтому нашу предыдущую таблицу можно переписать так:

в среднем столбце		1^2
по ломаной	I—I	2^2
» »	II—II	3^2
» »	III—III	4^2
»	$(n-1)-(n-1)$	n^2

Итак, сумма всех чисел, стоящих над ломаной, равна также

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Оказывается, что в каждой из трёх частей нашей таблицы суммы чисел одинаковы, именно:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

Выше мы нашли, что сумма всех чисел таблицы равна.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

она же есть утроенна сумма $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.
Значит,

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Мы получили весьма часто используемую при изучении математики формулу для нахождения суммы квадратов любого числа n первых чисел натурального ряда.

Примеры:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=385,$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2=\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}=338\,350 \quad [42].$$

Сумма квадратов натуральных чисел имеется у Архимеда и несколько позднее — в вавилонских текстах.

д) Сумма кубов первых n чисел

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

Напишем таблицу умножения, доведённую до $n\cdot n$ в виде квадратной числовой таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	. . . . .	(n-1)	n
2	4	6	8	10	12	14	. . . . .	2(n-1)	2n
3	6	9	12	15	16	21	. . . .	3(n-1)	3n
4	8	12	16	20	24	28	. . . . .	4(n-1)	4n
5	10	15	20	25	30	35	. . . . .	5(n-1)	5n
6	12	18	24	30	36	42	. . . . .	6(n-1)	6n
7	14	21	28	35	42	49	. . . . .	7(n-1)	7n
.	.	.	.	.	.	.	. . . . . .	. .	. .
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	5(n-1)	6(n-1)	7(n-1)		$(n-1)^2$	(n-1)n
n	2n	3n	4n	5n	6n	7n		n(n-1)	n·n

Рис. 63.

Легко убедиться, что в каждом наугольнике (на научном языке эти фигуры называются гно́монами) нашей таблицы сумма чисел даёт полный куб:

$$1 = 1^3$$
$$2 + 4 + 2 = 8 = 2^3$$
$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27 = 3^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)\, n + n \cdot n + (n-1)n + (n-2)\, n + \ldots +$$
$$+ 3n + 2n + n = n\,[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) +$$
$$+ (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1] = n\{[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n] +$$
$$+ [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)]\} = n \cdot n^2 = n^3.$$

Выражение в фигурных скобках по доказанному, как сумма натуральных чисел от 1 до n и от 1 до $n-1$, равно n^2.

Итак, сумма чисел нашей таблицы, вычисленная по наугольникам, равна:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3.$$

С другой стороны, складывая числа по строкам, имеем:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) +$$
$$+ \ldots + n\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\,(1 + 2 +$$
$$+ 3 + \ldots + n) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Но мы видели, что

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2};$$

следовательно:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.$$

Сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна квадрату суммы этих чисел.

Формула эта имеется у древнейшего математика Индии Апастамбы, жившего не позднее IV в. до н. э.

Примеры:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots 10^3 = \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 55^2 = 3025,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3 = \left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right)^2 = 5050^2 = 25\,502\,500.$$

Можно отметить ещё соотношения:

$$1^3=1, \quad 1^3+2^3=9, \quad 1^3+2^3+3^3=36, \quad 1^3+2^3+3^3+4^3=100,$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225 \text{ и т. д.}$$

Последовательные суммы 1, 9, 36, 100, 225, ... представляют квадраты последовательных треугольников чисел 1, 3, 6, 10, 15,...

Большинство выведенных нами формул относительно чисел натурального ряда было известно греческим математикам, а некоторые ещё ранее вавилонским и египетским математикам по крайней мере 4000 лет назад.

В более поздние времена были найдены формулы для сумм четвёртых, пятых, шестых и дальнейших степеней n первых чисел натурального ряда.

Формула

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n),$$

приписывается ал-Каши (XV в., Самарканд), но она была известна жившему около 1000-го года в Египте математику ибн ал-Кальсали. По всей вероятности, ал-Каши нашёл её самостоятельно.

Дальнейшие формулы этого рода были найдены в средние века и в новое время. Фаулхабер (1580—1635) даёт следующую таблицу сумм:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n).$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{12}(3n^4+6n^3+3n^2)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

$$1^5+2^5+\ldots+n^5=\frac{1}{12}(2n^6+6n^5+5n^4-n^2).$$

$$1^6+2^6+\ldots+n^6=\frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n).$$

$$1^7+2^7+\ldots+n^7=\frac{1}{24}(3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2).$$

$$1^8+2^8+\ldots+n^8=\frac{1}{360}(40n^9+180n^8+240n^7-168n^5+80n^3-12n).$$

$$1^9+2^9+\ldots+n^9=\frac{1}{180}(18n^{10}+90n^9+135n^8-126n^6+$$
$$+90n^4-27n^2).$$
$$1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}=\frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-$$
$$-33n^3+5n).$$
$$1^{11}+2^{11}+\ldots+n^{11}=\frac{1}{24}(2n^{12}+12n^{11}+22n^{10}-33n^8+$$
$$+44n^6-33n^4+10n^2).$$
$$1^{12}+2^{12}+\ldots+n^{12}=\frac{1}{2730}(210n^{13}+1365n^{12}+2730n^{11}-$$
$$-5005n^9+8580n^7-9009n^5+4550n^3-691n).$$

Все эти формулы при проверке оказались верными. Исторический интерес их в том, что Фаулхабер здесь получает в 6 случаях впервые так называемые бернуллиевы числа (коэффициенты последних слагаемых после раскрытия скобок):

$$\frac{1}{6},\quad -\frac{1}{30},\quad \frac{1}{42},\quad -\frac{1}{30},\quad \frac{5}{66},\quad -\frac{691}{2730},$$

представляющие большой интерес для теории чисел. Швейцарский математик Яков Бернулли (1654—1705), чьим именем названы эти числа, находит их только 5. Кроме того, Фаулхабер не делает ошибки, допущенной Бернулли, у которого последний член для суммы девятых степеней — $\frac{1}{12}n^2$ вместо правильного

$$-\frac{27}{180}n^2=-\frac{3}{20}n^2.$$

Имея перед собой данную выше таблицу, легко получить равенство Якоби:

$$2(1+2+3+\ldots+n)^4=(1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5)+$$
$$+(1^7+2^7+3^7+\ldots+n^7)\qquad [43].$$

11. ПРОБЛЕМЫ ВАРИНГА И ГОЛЬДБАХА

Обычная теория арифметики основывается на разложении чисел на множители. Эту арифметику можно назвать **мультипликативной** (multiplicatio — умножение). Как показано выше, эта теория арифметики ведёт своё начало от Евклида. Много позднее возникла другая область арифметики, которая в основном занимается вопросами о представлении целых чисел в виде суммы целых же чисел наперёд заданного вида. Это так называемая **аддитивная** (additio — сложение) арифметика. Отдельные вопросы такого рода ставил уже Диофант (III—IV вв.) и решали их Ферма (XVII в.), Лейбниц (XVII—XVIII вв.) и др. Эти отдельные попытки изучения аддитивных свойств чисел были превращены в науку Л. Эйлером, который дал решение ряда вопросов этой теории.

Приведём примеры вопросов аддитивной арифметики, которые решались в прежнее время.

а) Диофант, а затем Леонардо Пизанский нашли, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами суммой двух квадратов.

Пример:

$$53\cdot 25 = (7^2 + 2^2)(3^2 + 4^2) = 13^2 + 34^2 = 29^2 + 22^2.$$

В общем виде имеем:

$$(a^2 + b^2)(m^2 + p^2) = (am + bp)^2 + (bm - ap)^2 =$$
$$= (am - bp)^2 + (bm + ap)^2.$$

Примечание. Если $a=b$ или $m=p$, то полученные суммы будут равными:

$$53\cdot 32 = (7^2 + 2^2)(4^2 + 4^2) = 36^2 + 20^2.$$

Леонардо Пизанский получает доказываемое равенство следующим образом:

$$(a^2 + b^2)(m^2 + p^2) = a^2m^2 + a^2p^2 + b^2m^2 + b^2p^2 =$$
$$= a^2m^2 + a^2p^2 + b^2m^2 +$$
$$+ b^2p^2 + 2abmp - 2abmp = (a^2m^2 + 2abmp + b^2p^2) +$$
$$+ (b^2m^2 - 2abmp + a^2p^2) = (am + bp)^2 + (bm - ap)^2.$$

Но слагаемые второй строки можно сгруппировать иначе и получить:

$$(a^2 + b^2)(m^2 + p^2) = (a^2m^2 - 2abmp + b^2p^2) + (b^2m^2 + 2abmp +$$
$$+ a^2p^2) = (am - bp)^2 + (bm + ap)^2.$$

Если оба сомножителя являются суммами трёх квадратов, то произведение их суммой трёх квадратов не является, как показывает пример: $21\cdot 3 = (4^2+2^2+1^2)\ (1^2+1^2+1^2) = 63$; 63 нельзя представить в виде суммы трёх квадратов.

Эйлер показал, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма четырёх квадратов, является также суммой четырёх квадратов:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(m^2+n^2+p^2+q^2)=$$
$$=(an+bm+cq+dp)^2+(am-bn+cp-dq)^2+$$
$$+(-ap-bq+cm+dn)^2+(aq-bp-cn+dm)^2.$$

Примеры:

$$10\cdot 7=(1^2+1^2+2^2+2^2)(1^2+1^2+1^2+2^2)=70=8^2+2^2+1^2+1^2;$$
$$110\cdot 94=(1^2+3^2+8^2+6^2)(2^2+4^2+5^2+7^2)=10\,340=$$
$$=96^2+24^2+8^2+22^2.$$

Формулы для произведений сумм двух и четырёх квадратов имеют большие применения в арифметике высших чисел (комплексных и кватернионов).

Естественно было ожидать, что аналогичная теорема существует для множителей из 8, 16, 32 и т. д. слагаемых квадратов.

Для множителей из 8 слагаемых было доказано существование этой теоремы членом-корреспондентом Петербургской Академии наук датчанином К. Ф. Дегеном в 1822 г.; неверным является указание всех авторов, которые приписывают это открытие итальянскому математику Бриоски (1824—1897).

Неожиданностью явилось открытие С. Робертса (1859—1899), что для сомножителей из 16 квадратов подобная теорема не имеет места. Адольф Гурвитц (1859—1919) доказал, что указанный способ представления произведения в виде сумм квадратов имеет место только для сомножителей из двух, четырёх и восьми квадратов.

б) Лейбниц (1646—1716) интересовался вопросом: сколькими способами можно данное натуральное число представить в виде суммы натуральных же чисел?

Обозначим символом $p(n)$ число способов, сколькими можно составить натуральное число n из натуральных же чисел. Имеем:

n	Представления числа n в виде сумм	$p(n)$
2	2, 1+1	$p(2)=2$
3	3, 2+1, 1+1+1	$p(3)=3$
4	4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1	$p(4)=5$
5	5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 1+1+1+1+1	$p(5)=7$
6	6, 5+1, 4+2, 3+3, 4+1+1, 3+1+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 3+2+1	$p(6)=11$

Для значений n от 2 до 6 значения $p(n)$ составляют ряд простых чисел натурального ряда 2, 3, 5, 7, 11. Появляется соблазн считать замеченный порядок общим законом, именно, что $p(n)$ равняется $(n-1)$-му простому числу в натуральном ряду, и ожидать, что $p(7)$ равняется 13. Однако подсчёт не подтверждает этого предположения.

Число 7 можно представить в виде суммы не 13, а 15 способами:

$$7, 6+1, \quad 5+2, \quad 4+3, \quad 5+1+1, \quad 4+1+1+1, \quad 3+1+1+1+1,$$

$$2+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1+1, \quad 2+2+3, \quad 3+3+1,$$

$$1+1+2+3, \quad 2+2+1+1+1, \quad 1+2+4, \quad 2+2+2+1.$$

Лейбниц, обнаружив ошибочность первоначального индуктивного наблюдения, замечает: «изящный пример обманчивой индукции!»

В какой мере в этом случае индуктивное заключение было обманчиво, показывает подсчёт. Если бы индуктивное заключение о том, что $p(n)=p_{n-1}$, т. е. $(n-1)$-у простому числу в натуральном ряду было правильным, то p (200) должно было бы равняться 199-у простому числу. В первой тысяче всего 168 простых чисел, 199-е простое число примерно равно 1200 [44]. Между тем на самом деле оказалось:

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

Видный немецкий математик конца XIX в. Кронекер уверял, что нахождение выражения (формулы) для p (n) для любого n превышает возможности современной ему математики. Индийский математик Раманудьян (1887—1920) совместно с английским математиком Харди нашли формулу для вычисления p (n), которая дала для p (200) результат, совпадающий с данным выше. Он указал без доказательства много числовых формул, которые были неизвестны европейским математикам.

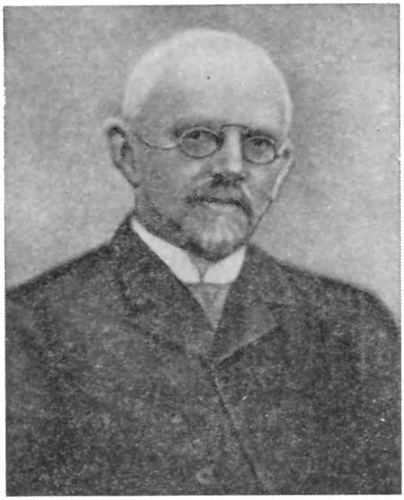
в) Важнейшей теоремой теории чисел является теорема: **простое число вида $4k+1$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов единственным образом** (Ферма, 1651).

Примеры: $13=4\cdot 3+1=3^2+2^2$, $17=4\cdot 4+1=4^2+1^2$.

Эйлер (1742) доказал, что если число может быть представлено двумя способами в виде суммы двух квадратов, то оно не может быть простым. Из этих теорем выросло много других теорем теории чисел.

г) **Проблема Варинга (Уоринга).**

У Диофанта возник вопрос о представлении натуральных чисел суммами квадратов натуральных же чисел, в частности



Давид Гильберт.

о представлении суммой не более четырёх квадратов (кн. V). Баше (1621) проверил это положение для всех чисел, не превышающих 325. Ферма (1636) заявляет, что он имеет доказательство этой теоремы, но в 1659 г. сообщает о трудностях доказательства её. Доказательство теоремы, что всякое натуральное число есть сумма не более четырёх квадратов натуральных же чисел, было дано Эйлером в 1751 г. и уточнено Лагранжем в 1772 г. с указанием об использовании им идеи доказательства Эйлера. Очень многие математики занимались в дальнейшем родственными этой теореме вопросами.

Английский математик Варинг (Уоринг, 1770) высказал предположение, что всякое натуральное число есть сумма не более 4 квадратов, или 9 кубов, или 19 четвёртых степеней натуральных чисел, что вообще всякое натуральное число N можно представить в виде суммы

$$N = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k,$$

где s — конечное число, зависящее только от k и меньшее N, т. е. s есть функция от k; $s = g(k)$.

Работы Эйлера и Лагранжа, как мы видели, показали, что $g(2) = 4$, т. е. что всякое натуральное число есть сумма не более 4 квадратов. Виферих (1909) доказал, что $g(3) = 9$, т. е. что всякое натуральное число есть сумма не более 9 кубов. Известны только два числа, представляющие суммы 9 кубов: $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$, $239 = 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3$, или $5^3 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 2^3 + 1^3$; для всех остальных чисел достаточно меньшего числа кубов.

В 1909 г. Гильберт доказал справедливость предположения Варинга, не дав, однако, способа нахождения числа слагаемых s. Академик И. М. Виноградов около 1930 г. дал метод, которым для достаточно больших чисел можно доказать справедливость предположения Варинга и определить число слагаемых s как функцию от k. Своим методом И. М. Виноградов решил и ряд других проблем, родственных проблеме Варинга.

Наконец, действительный член Академии наук СССР Ю. В. Линник доказал, что всякое достаточно большое число можно представить в виде суммы 7 кубов, а также указал один общий случай, в котором число представляется в виде 6 кубов («Математический сборник», 1943, № 1).

д) **Проблема Гольдбаха.**

Христиан Гольдбах (1690—1764), член Петербургской Академии наук первого её состава (с 1725 г.), в 1742 г. в письме к Эйлеру о разных недоказанных математических предложениях, которые подтверждаются проверкой, упоминает и о предложении, что всякое число есть сумма трёх простых чисел, причисляя к простым числам единицу[1]. Эйлер отвечает: «Предложение о том, что всякое чётное число есть сумма двух простых чисел, я считаю настоящей теоремой, хотя я и не в состоянии её доказать». Эйлер указывает, что если эта теорема доказана, то из неё вытекает, что всякое нечётное число есть сумма трёх простых чисел [45].

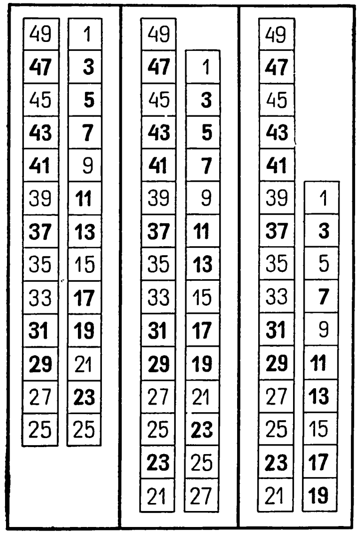


Рис. 64. Проверка допущения Гольдбаха для чисел 50, 48, 40.

Накопился громадный эмпирический материал, подтверждающий высказанное предположение Гольдбаха. Из математиков, занимавшихся в широком масштабе проверкой предложения Гольдбаха для чётных чисел, можно указать: Георга Кантора (до 1000), Обри (до 2000), Хауснера (до 10 000), финляндского математика Пипинга в 1940 г. (до 100 000).

Применялись при этом разные методы, часто громоздкие. Однако существует элементарный механический способ проверки для небольших чисел предложения Гольдбаха[1]. Укажем этот способ, который может быть предложен в школе ученикам младших классов.

Возьмите две полоски плотной бумаги и нанесите на них равные клетки. В клетки одной полоски вписывайте нечётные числа в убывающем порядке, начиная с некоторого числа, например с 50. На другую полоску напишите нечётные числа в возрастающем порядке, начиная с 1.

Подчеркните на обеих полосках все простые числа по самодельному «решету Эратосфена» или таблице простых чисел (на нашей таблице простые числа напечатаны жирным шрифтом).

---

[1] Очевидно, Гольдбах подразумевал «сумму не более трёх простых чисел». Эту мысль высказал уже Декарт в начале XVII в.

Лев Генрихович Шнирельман.

Прикрепите полоски рядом так, чтобы число 49 одной полоски стояло на одной высоте с 1 другой полоски. В таком случае стоящие рядом подчёркнутые числа (жирные) на обеих полосках дают представление числа 50 в виде суммы двух нечётных простых чисел. Таких разбиений числа 50 оказывается 4, именно

$$3+47,\ 7+43,\ 13+37, 19+31.$$

Укажем попутно, что самое большое ныне известное количество гольдбаховых разбиений имеет число 990, именно 52 разбиения.

Этими же полосками можно воспользоваться для разбиений любого чётного числа, не превышающего 50, на сумму двух простых чисел. Для этого нужно вторую полоску поместить рядом с первой так, чтобы сумма рядом стоящих чисел оказалась равной разбиваемому числу.

Делалось очень большое число попыток доказать теорему Гольдбаха, но все они долго оставались безрезультатными. Ещё в 1922 г. английский математик Харди вынужден был заявить, что для доказательства этой теоремы существующая ныне математика недостаточна. Нужно было создать новые методы в математике.

Крупным шагом вперёд в проблеме Гольдбаха была работа советского математика Л. Г. Шнирельмана в 1930 г. Л. Г. Шнирельман (1905—1938) доказал, что существует такое определённое число k, что всякое число n есть сумма не более чем k простых чисел. Значение этого числа k было в дальнейшем уменьшено до 67 и позднее до 20. Начиная с 1930 г. появился ряд работ по проблеме Гольдбаха академика И. М. Виноградова, создавшего новые методы для решения старого вопроса. Окончательный результат своих работ автор резюмирует в словах: «Существует постоянное число C_0 такое, что всякое нечётное число N, большее C_0, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел:

$$N = p_1 + p_2 + p_3».$$

Кроме того, академик И. М. Виноградов даёт формулу, выражающую число представлений числа N в виде суммы трёх простых чисел.

Таким образом можно считать доказанным, что всякое нечётное число, начиная с некоторого C_0, есть сумма трёх простых чисел.

Работы самого И. М. Виноградова оставили открытым вопрос о величине числа C_0. К. Г. Бороздкин (неопубликованная диссертация «К вопросу о постоянной акад. И. М. Виноградова», 1939) показал, что

$$C_0 = e^{e^{e^{41,96}}}, \quad \text{где} \quad e = 2{,}7182\ldots$$

Позднее К. Г. Бороздкин доказал, что теорема И. М. Виноградова имеет место начиная с числа $C_0 = e^{e^{16,038}}$ («Труды III всесоюзного математического съезда», т. I, стр. 3, 1956).

Что касается другой части гипотезы Гольдбаха, именно того, что всякое чётное число есть сумма двух нечётных простых чисел, то в решении её не достигнуто никакого существенного успеха [46].

12. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОТДЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

а) Пифагорейцы сопоставили три последовательности чисел: 1) натуральный ряд, 2) квадраты чисел натурального ряда и 3) разности последовательных квадратов:

1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14...
2)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196...
3)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29...

(числа последнего ряда: 4—1=3, 9—4=5 и т. д.). Наблюдение обнаруживает следующий факт: когда число третьей последовательности квадратное, то оно в сумме со стоящим над ним квадратным числом даёт квадратное число, стоящее во второй последовательности на следующем справа месте:

$$9 + 16 = 25; \quad 25 + 144 = 169 \text{ или } 3^2 + 4^2 = 5^2; \quad 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Равенство это можно было предвидеть. Во второй последовательности рядом стоят n^2 и $(n+1)^2$; в третьей строке под числом n^2 стоит $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Если последнее число $2n+1$ квадратное, скажем k^2, т. е. если $2n+1 = k^2$ и k натуральное число, то $(n+1)^2 - n^2 = k^2$, $(n+1)^2 = k^2 + n^2$.

Примечание. Не лишне отметить: всякое нечётное число $2n+1$ есть разность квадратов двух последовательных натуральных чисел: $(n+1)^2-n^2$. Например: $17=2\cdot 8+1=9^2-8^2$, и т. д.

Вавилонянам и египтянам была известна теорема: сумма площадей квадратов, сторонами которых являются катеты прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, стороной которого служит гипотенуза этого треугольника (теорема, получившая позднее название пифагоровой).

Полученные из рассмотрения вышеуказанных последовательностей тройки квадратов натуральных чисел являются числовыми выражениями площадей квадратов, соответствующих пифагоровой теореме; числа k, n и $n+1$ являются сторонами прямоугольного треугольника, притом все три числа целые. Целочисленные стороны прямоугольного треугольника получили название пифагоровых троек.

Вопрос о нахождении пифагоровых троек интересовал греческих математиков и получил у них своё решение.

Пифагорейцы указали, что числа

$$a, \quad \frac{a^2-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a^2+1}{2},$$

для которых $a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$, дают пифагорову тройку, если a нечётное число (в противном случае, при a чётном, второе и третье числа не будут целыми).

На принадлежность данного вывода Пифагору указывает Прокл (греческий философ V в. н. э.). Он же говорит, что Платон дал формулу:

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2.$$

В школе Платона было найдено, что если a число чётное, то тройка чисел

$$a, \ \left(\frac{a}{2}\right)^2-1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2+1$$

даёт пифагорову тройку, так как все три числа целые и

$$a^2+\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right]^2=\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right]^2.$$

Таким образом, вопрос о пифагоровых тройках получил у греков решения:

$$a, \quad \frac{a^2-1}{2}, \quad \frac{a^2+1}{2} \text{ при } a \text{ нечётном,}$$

$$a, \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1, \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 \text{ при } a \text{ чётном.}$$

Примеры:

$$5, \quad \frac{5^2-1}{2} = 12, \quad \frac{5^2+1}{2} = 13;$$

$$8, \quad \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 1 = 15, \quad \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 1 = 17.$$

Решение вопроса формулами Пифагора и Платона не даёт всех возможных пифагоровых троек при выборе одного числа тройки. Беря, например, за одно число 65, мы по правилу Пифагора получим другие два числа тройки $\frac{65^2-1}{2} = 2112$ и $\frac{65^2+1}{2} = 2113$ и, значит, пифагорову тройку 65, 2112, 2113.

Однако существует пифагорова тройка, начинающаяся с того же числа 65: 65, 72, 97, которую даёт вавилонская клинописная таблетка, относимая к эпохе XIX—XVI вв. до н. э. Другой пример из той же вавилонской таблетки: пифагорова тройка, начинающаяся с числа 60.

Платонова формула даёт два других числа тройки $30^2-1=$ $=899$ и $30^2+1=901$ и, таким образом, тройку 60, 899, 901. Вавилонская таблетка указывает тройку 60, 45, 75.

В одной вавилонской математической таблетке даётся 15 пифагоровых троек, из которых 4 с ошибками или описками. Ошибки позволяют уловить, что автор находил числа троек на основании тождеств:

$$(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Беря в рассмотренном выше примере $2pq=72$, и, значит, $pq=36$, можно взять $p=9$, $q=4$; имеем:

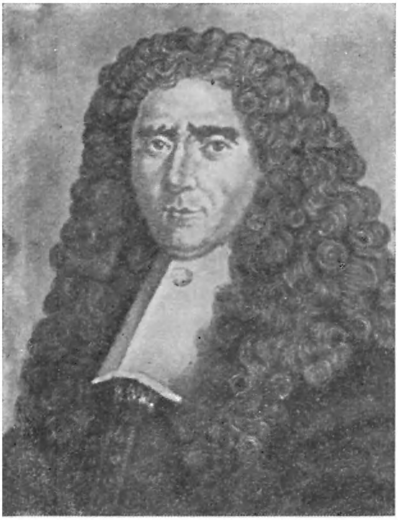
$$p^2 - q^2 = 81 - 16 = 65,$$

$$p^2 + q^2 = 81 + 16 = 97,$$

т. е. пифагорову тройку 72, 65, 97.

Беря в том же примере $pq=36$ и $p=18$, $q=2$, получаем пифагорову тройку 72, 320, 328.

Метод вавилонян даёт возможность найти все пифагоровы тройки, имеющие выбранное исходное число. Приёмы Пифагора и Платона и их различные модификации дают только одно частное решение вопроса, следовательно, вавилонский приём гораздо



Франсуа Баррем.

совершеннее греческих. Это лишний раз подтверждает неоднократно высказывавшееся мнение, что вавилонская (и египетская) математика (и их науки вообще) не была только практической, как можно было думать по имевшемуся вначале малому числу известных нам памятников.

Первые найденные европейскими учёными вавилонские математические таблетки содержали элементарные вопросы, это как бы дошедшие до нас обрывки вавилонских школьных руководств, кусочки «Киселёвых» и «Барремов» (по имени автора учебника арифметики Франсуа Баррема сама арифметика во Франции и Испании называется барремом). По ним нельзя делать вывод, что у вавилонян, кроме Киселёвых и Барремов, не существовали Гауссы и Чебышевы. Небезынтересно отметить, что одна из ошибок или описок вавилонского автора заключается в том, что он вместо $(p+q)^2$ пишет p^2+q^2, т. е. делает ошибку, которую сотни раз в классе имел случай исправлять каждый учитель [47].

б) На хорошо известной всем картине художника Н. П. Богданова-Бельского, хранящейся в Третьяковской галерее в Москве, изображён урок устного счёта, проводимый бывшим профессором Московского университета С. А. Рачинским в школе, которую он открыл для крестьянских детей во второй половине прошлого века (в школе учился и будущий художник Богданов-Бельский). Ученики вычисляют записанный на доске пример

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

Вычисление обнаруживает, что

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365,$$

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=\frac{365+365}{365}=2.$$

Рис. 65. Урок арифметики.

Никколо Тарталья.

Этот пример напоминает о свойствах некоторых групп натуральных чисел, объединённых в таблицах, которые носят название **треугольники Тартальи:**

$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$

. . . .

. . . .

$$3^2+4^2=5^2$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$
$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

. . . .

. . . .

Легко доказать, что эти равенства единственные каждое в своём роде, т. е. что ни одного из этих равенств нельзя начинать ни с какого другого натурального числа, отличного от первого числа соответственного табличного равенства [48].

в) Существует ещё такой числовой треугольник:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$
$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Докажите, что для всякого натурального n имеет место указанное в таблице свойство, т. е., что

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + [(n^2 - n + 1) + 2] + [(n^2 - n + 1) + 4] + \\ + \dots + [(n^2 - n + 1) + 2(n - 1)] \quad [49].$$

г) Очевидно существование таких равенств:

$$1^2 = 1$$
$$3^2 = (2 \cdot 2 - 1)^2 = 2 + 3 + 4$$
$$5^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$
$$7^2 = (2 \cdot 4 - 1)^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$9^2 = (2 \cdot 5 - 1)^2 = 5+6+7+8+9+10+11+12+13$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Докажите, что указанное свойство имеет место для всех нечётных натуральных чисел, т. е. что для всех натуральных значений n:

$$(2n - 1)^2 = n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (3n - 2) \qquad [50].$$

д) Всякое кубическое число n^3 равно разности квадратов двух других целых чисел.

В предыдущей главе найдено равенство:

$$1^3 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$n^3 = [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3] - [1^3 + 2^3 + \\ + 3^3 + \dots + (n - 1)^3] = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2,$$

где $n(n+1)$ и $(n-1)n$ суть числа чётные, так как они представляют произведения двух последовательных натуральных чисел, поэтому $\frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{(n-1)n}{2}$ оба числа целые.

Примеры:

$$1 = 1^3 = 1^2 - 0^2;$$

$$8 = 2^3 = \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = 3^2 - 1^2;$$

$$27 = 3^3 = \left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^3 = 6^2 - 3^2;$$

$$64 = 4^3 = \left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2 = 10^2 - 6^2 \text{ и т. д.} \qquad [51]$$

Подобных перечисленным свойств натуральных чисел существует много.

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

1. УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Искусство письма является достоянием человека, стоящего на сравнительно высокой ступени развития. У народов, не достигших ещё такого развития, устный счёт и устное выполнение операций над числами играли бо́льшую роль, чем у того же народа на более высокой ступени культуры. Об этом свидетельствуют и памятники по истории математики. Ученику древнеегипетской школы делается внушение. «Когда ты считаешь в уме, не пророни ни слова!» Источник, в котором даётся эта фраза, относится к эпохе около 1300 г. до н. э. Индийская национальная школа до сих пор культивирует устные вычисления в такой мере, что достигает результатов, которые приводят в удивление европейцев.

Приёмы сокращённых и облегчённых вычислений, рекомендуемые в европейских школах, выработались в Индии. Промежуточные результаты вычислений учащиеся индийских школ записывали на белых дощечках, усыпанных цветным песком, и «стирали» их при дальнейших этапах устных вычислений, заменяя записями новых результатов. Отсюда становится понятным заглавие арабского «Руководства к вычислениям в воздухе и пыли».

О пальцевом счёте была речь выше. Пальцами пользовались и для поддержания вычислений в уме. Бэда (672—735), английский автор первых руководств для монастырских школ, посвящает в своей книге о календарных расчётах целый раздел вычислениям при помощи пальцев. Приёмы обучения счёту с помощью наглядных пособий были в Египте.

Платон («Законы») пишет: «Всякий должен из каждой из этих наук (арифметики и геометрии) усвоить по крайней мере столько, сколько изучают в Египте несметные толпы детей при начальном обучении. Что касается счёта, то там специально для детей изобретены учебные пособия, чтобы сделать маленьким изучение преподаваемого столь же приятным, как игры.

Таковы игры с яблоками и венками, которые, оставаясь в одном и том же числе, разделяются между большим и меньшим числом детей, или борьба, в которой посменно и по порядку все расставляются или соединяются попарно». Как происходило это обучение счёту при помощи игр, нам неизвестно. Не даёт нам сведений об этом и книга специалиста по Египту М. Матье «День египетского мальчика» (М., 1954), в которой описан и урок арифметики в египетской школе.

И у народов более высокой культуры устные вычисления занимают по методическим соображениям важное место при обучении. Так, например, Аристотель подчёркивает значение их в следующих словах («Топика», VIII): «Подобно тому, как в геометрии необходимы упражнения в «началах», способность к устным вычислениям имеет громадное значение в обращении с числами для выполнения умножения прочих (по-нашему нетабличных И. Д.) чисел».

Комментатор Аристотеля Александр Афродизский (около 200 г. н. э.) разъясняет: «Устными вычислениями называет Аристотель умножение чисел в пределах 10. Усвоение их устраняет необходимость заучивания соответственных больших чисел; так. из «дважды два — четыре» следует «$20\times2=40$», «$20\times20=400$» и $200\times20=4000$». Диофант (III и IV вв. н. э.) советует начинающим «крепко внедрить сложение, вычитание и умножение чисел».

В римской школе согласно литературным памятникам производилось заучивание таблицы сложения всем классом нараспев. Гораций говорит, что в школе ученики однообразным завыванием читают свои «один да один — два, два да два — четыре и т. д.»; вой этот, по словам автора, прерывается только время от времени шлепками учителя и криками наказываемых. Подобные же высказывания имеются у Цицерона и Августина (IV в. н. э.). О таблице умножения в римской школе было сказано выше.

Методические упражнения для устных вычислений в печатном учебнике впервые даёт Тарталья (1499—1557) в своём руководстве, представляющем энциклопедию теоретической и практической математики своего времени. Эта книга даже по внешнему оформлению имеет сходство с «Арифметикой» Л. Магницкого, и вероятно её имеет Магницкий в виду, когда говорит, что он для своей книги материал

Из многих разных книг собравше,
Из грецких убо и латинских,
Немецких же и **италийских.**

Тарталья предпосылает в своём руководстве разделу об арифметических действиях целую серию упражнений на усвоение таблиц сложения, вычитания, умножения и деления, требуя, например, заучивания таблицы умножения чисел до 40 на 40 и выполнения умножения чисел в этих пределах устно. В середине XVIII в. для устных упражнений начинают выделять особые уроки в школе.

В «Арифметике» Магницкого (1703) нет специальных разделов упражнений для устных вычислений, но неоднократно подчёркивается значение усвоения таблиц результатов элементарных действий над небольшими числами, что делалось, очевидно, для облегчения устных расчётов. В этом направлении изложен его взгляд в приводимом из «Арифметики» стихотворном правиле заучивания таблицы сложения:

К двум един то есть три,
Два к трём — пять смотри.
Так и всё назирай,
Таблицу разбирай.
Хотяй же не лгати,
Похвально слагати
Да тщится познати,
Искустно сказати.

Аналогично поступает Магницкий и при изложении умножения.

2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Для облегчения вычислений как устных, так и письменных служили готовые таблицы результатов разных действий над числами. История таких таблиц имеет начало в очень глубокой древности.

По крайней мере 3000 лет до н. э. у народов древнего Вавилона имелись в обращении разнообразные арифметические таблицы, известные нам теперь в большом количестве. Среди них имеются таблицы умножения в пределах 60, таблицы квадратов последовательных чисел, таблицы деления (выражения частных в шестидесятеричных дробях), таблицы для решения задач на процентные вычисления, а также таблицы для выполнения некоторых алгебраических преобразований.

Вычислениями занимались не только те, «кому на сие должность есть», т. е. те, кто этим себе зарабатывал хлеб, но и знать, вплоть до короля Ашурбанипала (668—626 гг. до н. э.), который заявляет: «Я совершаю запутаннейшие деления и умножения, которые едва выполнимы; я считаю хитроумные таблички на тёмном шумерском языке, которые трудно передаваемы на разговорном наречии». Иероглифы мёртвого и забытого уже тогда шумерского языка, обозначавшие арифметические операции, употреблялись среди числовых и текстовых символов разговорного языка и составили первые математические символы, содействуя зарождению в Вавилоне символической математики задолго до её возникновения в других странах. Когда Вавилонский вычислитель в шестидесятеричной системе писал: «13 20 в квадрате равно 2 57 46 40»[1], что в современной записи означает $(13 \cdot 60+20)^2=2 \cdot 60^3+57 \cdot 60^2+46 \cdot 60+40$, конечно, он промежуточные выклады делал с помощью таблиц.

Египтяне выполняли умножение удваиванием и сложением, деление медиацией (делением пополам) и сложением. Таблицу сложения они, очевидно, заучивали, так как письменного выполнения в памятниках их не встречается. При делении чисел египтяне сталкивались с необходимостью иметь дроби. Они употребляли, как увидим в дальнейшем, только доли, т. е. дроби вида $\frac{1}{n}$. Отсюда возникла необходимость выражать дробное частное в виде суммы долей. Для этой цели имелись специальные таблицы разбиения дробных чисел на сумму долей, которых мы не знаем у других народов. Такая таблица имеется в начале папируса Ахмеса.

В учебнике арифметики армянского математика Анании из Ширака (VII в. н. э.) в начале книги даётся таблица сложения, вычитания, умножения и деления чисел. Это самые древние дошедшие до нас таблицы этого рода в учебном руководстве.

3. ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ

Таблицу умножения, которая была у шумеров, мы у египтян не находим. Умножение чисел они делали удвоением, выполняемым устно. Греки и римляне имели такие таблицы, хотя греческие таблицы умножения до нас не дошли. Это объясняется тем, что они считались элементарными пособиями, которые каждый должен был усваивать в школе и которым не было места в дошедших до нас научных трактатах. Мы также не имеем ни одного греческого руководства по практической арифметике (логистике), которую Платон считал делом торгашей и барышников, а не философа. Греческое название математики «мáтезис» означало «достойное изучения», достойное изучения для философа; логистика не входила в мáтезис.

Только около 100 г. н. э. Никомах Геразский считает возможным и нужным поместить таблицу умножения в своём «Введении в арифметику», но делает он это не в учебных целях, а для того чтобы воспользоваться числовыми последовательностями для своих теоретических рассуждений. Это обстоятельство не мешает таблицу назвать таблицей умножения, так как всякая таблица умножения, помимо своей прямой задачи, может быть использована и в других целях, в том числе и тех, в которых использует свою таблицу Никомах[2].

---

[1] Отделённые в нашей записи промежутками две цифры означают число единиц данного разряда.

[2] Но остаётся фактом, что мы не имеем ни одного греческого примера умножения с использованием таблицы умножения или вычислительной арифметики (логистики).

Никомах располагает свою таблицу произведений чисел, идущую до 10×10, в виде квадрата, в первой строке и в первом столбце которого расположены записи чисел 1, 2, ..., 10, а в клетках скрещивания строк и столбцов произведения. Таблица эта воспроизведена в книге проф. А. В. Васильева «Целое число» (стр. 39). В таком же виде даёт таблицу умножения Боэций (480—525). Однако многие последующие авторы до XV в. располагают таблицу ещё строками, загромождая её словами: «один раз», «дважды», «трижды» и т. д. В таблицу часто включаются произведения простейших дробей на 2, 3, 4 и т. д. и нахождение долей числа. Так, в таблицу умножения Леонардо Пизанского (XIII в.) включены строки:

$$\frac{1}{2} \text{ от } 1,\ \frac{1}{2} \text{ от } 2,\ \frac{1}{2} \text{ от } 3 \text{ и т. д. до } \frac{1}{2} \text{ от } 20;$$

$\frac{1}{3}$ от 1, $\frac{1}{3}$ от 2, $\frac{1}{3}$ от 3 и т. д. до $\frac{1}{3}$ от 27; для $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{13}$ берутся только числа, дающие результат в виде целого числа.

Древнейшие европейские рукописные руководства по арифметике дают таблицу умножения иногда и без словесных добавлений, в форме прямоугольника, как это делается и в настоящее время на обложках наших ученических тетрадей: числа от 1 до 10 умножаются по порядку на 1, на 2, на 3 и т. д., до умножения на 10. Каждое произведение при этом получается по два раза: например, в одной строке $7 \times 8 = 56$, в следующей $8 \times 7 = 56$. Такая таблица в школах часто называется пифагоровой. Последнее название объясняется следующим образом. Анонимная рукопись геометрии XII в., ошибочно приписывавшаяся Боэцию, содержала изображение счётной доски (абака), называя её «пифагоровым столиком». Печатное издание этой рукописи (1496) сохранило это название, но заменило абак таблицей умножения. Отсюда название «пифагорова таблица» перепечатывалось в других руководствах, принято школой при изучении арифметики, где держится до сих пор. Никакого отношения Пифагор к этой форме таблицы умножения не имеет.

В квадратной таблице умножения без надобности все произведения повторяются два раза. Этого повторения последующие авторы таблиц старались избегать, придавая таблице треугольную форму. Первый случай построения таблицы умножения в виде треугольника встречается в рукописи 1168 г.: затем такую таблицу приводят Шюке (1484) и Видман; последний впервые помещает эту таблицу в печатной книге (1489).

Таблица умножения у Шюке (1484)

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	4	6	8	10	12	14	16	18	0	
3	3	4	5	6	7	8	9	0		
	9	12	15	18	21	24	27	0		
4	4	5	6	7	8	9	0			
	16	20	24	28	32	36	0			
5	5	6	7	8	9	0				
	25	30	35	40	45	0				
6	6	7	8	9	0					
	36	42	48	54	0					
7	7	8	9	0						
	49	56	63	0						
8	8	9	0							
	64	72	0							
9	9	0								
	81	0								
0	0									
	0									

В первом столбце, вне рамки треугольника, расположены множители. Верхняя строка каждой полосы содержит множимые; под каждым из них записано произведение. Так, например, вторая полоса даёт $2\times2=4$, $2\times3=6$ и т. д., третья полоса: $3\times3=9$, $3\times4=12$ и т. д. В третьей полосе уже нет произведений $3\times1=3$, $3\times2=6$, так как эти случаи умножения были в первой и второй полосе в виде $1\times3=3$, $2\times3=6$. Таким образом, каждая полоса сокращается по сравнению с предыдущей на одно умножение.

У Видмана таблице придана более сжатая форма, чем у Шюке. Пусть надо найти 4×7. По столбцу, над которым расположен на правом краю вне сетки фигуры меньший сомножитель 4, спускаемся до строки, в левом конце которой находим больший сомножитель 7. Искомое произведение найдётся в клетке, в которой встречаются столбец и строка, соответствующие сомножителям.

В разных других старых руководствах по арифметике можно найти ещё иные способы оформления таблицы умножения. Обозрение их приводит к заключению, что польза от этих изощрений вряд ли соответствовала затрате времени и сил на их изобретение. Поскольку этим занимались упорно на протяжении сто-

Таблица умножения у Видмана (1489)

1	2							
2	4	3						
3	6	9	4					
4	8	12	16	5				
5	10	15	20	25	6			
6	12	18	24	30	36	7		
7	14	21	28	35	42	49	8	
8	16	24	32	40	48	56	64	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81

летий, можно сделать заключение, что усвоение таблицы умножения составляло для человека большой труд.

Л. Магницкий в своей «Арифметике» даёт таблицу умножения в более целесообразной простой форме:

$$\text{2-жды}\left\{\begin{array}{r}2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{array}\right. \quad \text{есть}\left\{\begin{array}{r}4\\6\\8\\10\\12\\14\\16\\18\\20\end{array}\right. \qquad \text{3-жды}\left\{\begin{array}{r}3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{array}\right. \quad \text{есть}\left\{\begin{array}{r}9\\12\\15\\18\\21\\24\\27\\30\end{array}\right.$$

и т. д. Каждый следующий столбик таблицы сокращается на одну строку по сравнению с предыдущим, так что в последнем столбике остаются лишь строки:

$$\text{9-тью}\left\{\begin{array}{r}9\\10\end{array}\right. \qquad \text{есть}\left\{\begin{array}{r}81\\90\end{array}\right.$$

Таблица сопровождается стихами:

Аще кто не твердит
Таблицы и гордит,
Не может познати
Числом, что множати
И во всей науки
Несвобод от муки,
Колико не учит
Туне ся удручит,
И в пользу не будет
Аще ю забудет.

4. РАСШИРЕННАЯ ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ

Усвоение таблицы умножения для чисел первого десятка, т. е. до 10×10, как свидетельствуют исторические памятники, было делом нелёгким. В рассказе о пальцевом счёте мы видели, как в римских школах таблицу умножения в этом пределе заменяли такой же таблицей в пределе до 5×5. С XIII по XVIII в. в руководствах арифметики даются письменные приёмы умножения, преследующие ту же цель, что и таблица.

Как и римский способ умножения на пальцах, эти приёмы при письменном умножении числа a и b используют $10-a$ и $10-b$, т. е. десятичные дополнения перемножаемых чисел. Побудителем к изобретению этих способов умножения чисел, бóльших 5 и меньших 10, могла быть римская нумерация со своими записями IX и IIX вместо VIIII и VIII. В Индии эти приёмы совершенно неизвестны.

Основные приёмы «облегчения» умножения основывались на следующих трёх тождествах:

$$\text{I. } a\cdot в=(10-a)\cdot(10-в)+10(a+в)-100;\quad 7\cdot8=(10-7)\cdot(10-8)+$$
$$+10(7+8)-100=3\cdot2+10\cdot15-100=6+50=56.$$

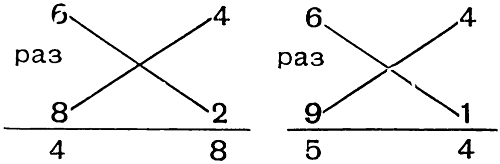
$$\text{II. } a\cdot в=10a-a(10-в);\quad 7\cdot8=10\cdot7-7\cdot(10-8)=70-7\cdot2=$$
$$=70-14=56.$$

$$\text{III. } a\cdot в=10[a-(10-в)]+(10-a)\cdot(10-в);$$
$$7\cdot8=10[7-(10-8)]+(10-7)\cdot(10-8)=10(7-2)+3\cdot2=$$
$$=50+6=56.$$

Все эти и другие подобные приёмы преследуют, как сказано, цель заменить знание таблицы умножения в пределах 10×10 более ограниченной таблицей до 5×5. Все европейские авторы до XVII в. приводят в своих руководствах подобные приёмы, подыскивая для них соответственные простые правила применения.

Грамматеус (1518), например, даёт для производства умножения на основании тождества III следующую запись.

Нужно найти 6×8 и 6×9. Записываем:

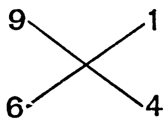


Во вторых столбцах стоят дополнения чисел до десяти (10—6, 10—8, 10—6, 10—9). Единицы произведения получаются перемножением этих дополнений, которые оба меньше 5; десятки произведения находятся вычитанием из одного из данных чисел дополнения другого числа.

Иными словами, для умножения 6 на 8 мы пишем:

$$6\times 8=(10-6)\times(10-8)+10\,[6-(10-8)]=4\times 2+10\,(6-2)=4\times 2+10\times 4=48$$

Так, в первом примере единиц в произведении будет $4\times 2=8$, десятков $6-2=4$ или $8-4=4$; во втором примере: $1\times 4=4$ (единицы произведения); 6—1 или 9—4 дают 5 (десятки произведения). Некоторые авторы записывали это умножение так:



Пересекающиеся прямые указывают числа, из которых вычитанием получается цифра десятков произведения. Существует предположение, что в подобной практике мог возникнуть знак умножения (×).

Расширенную таблицу умножения до 59×59 в шестидесятеричной системе поместил в своём учебнике Пётр Датский около 1300 г., усматривая в ней приём агитации за введение шестидесятеричной системы, не давшей всё же положительных результатов. Позднее разные авторы помещали в своих книгах расширенные таблицы умножения.

Печатные таблицы умножения чисел до 999×999 были изданы впервые в 1610 г. в виде огромного тома форматом 50 *см* × × 25 *см* и $10^1/_2$ *см* толщиной. Таблицы эти приспособлены и для умножения чисел вне данных пределов. Совершенно такого же содержания таблицы Крелле (1820) представляют книгу, все размеры которой более чем в два раза меньше.

К частным видам таблиц умножения относятся таблицы квадратов и кубов чисел. Древнейшими таблицами этого рода являются вавилонские, найденные в 1854 г. Они составлены около 1900 г. до н. э. и содержат квадраты чисел до 59^2 и кубы до 32^3 в шестидесятеричной системе. Таблицы квадратов и кубов в Европе ранее прилагались к руководствам по арифметике. Первыми отдельными изданиями их являются таблицы квадратных чисел до $100\,000^2$ (итальянца Маджини, 1592 г.) и кубов чисел до 100^3 (немца Клавия, 1604 г.). В подобных таблицах играет существенную роль расположение чисел с наибольшей возможной экономией места.

Умножение чисел разными способами заменялось сложением или вычитанием. Один из таких способов основывался на тождестве: $a\cdot b=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}$.

Специальные для вычислительной техники таблицы этого рода впервые предложил Маджини (Венеция, 1592 г.). Использование последней формулы при умножении чисел имеется и у арабских авторов, в частности наиболее чётко у ал-Кархи (около 1010 г.).

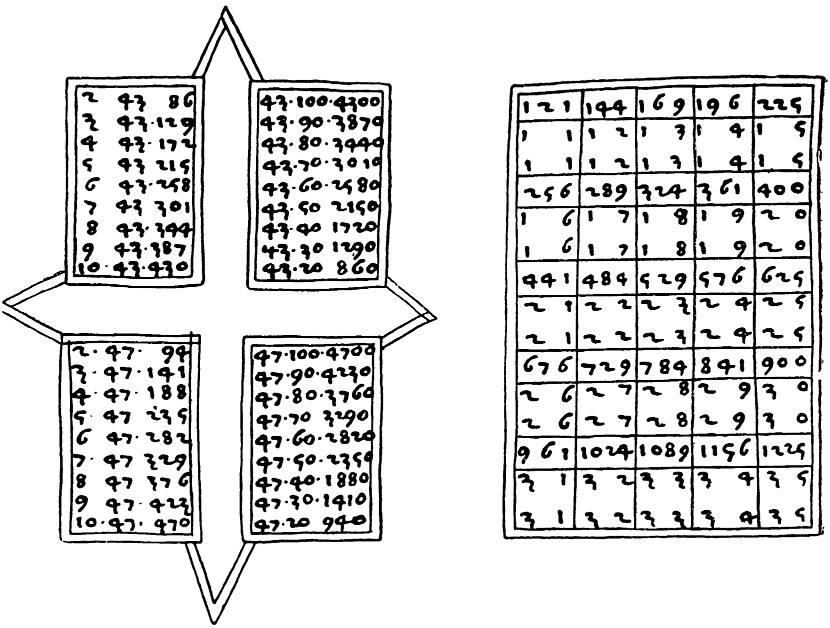


Рис. 66. Таблица умножения и таблица квадратов Бенедетто из Флоренции (первая половина XV в.).

5. РАСШИРЕННЫЕ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ В РОССИИ

Первой изданной в России печатной таблицей умножения, охватывающей произведения чисел от 1×1 до 100×100, была книга «Считание удобное, которым всякий человек, купующий или продающий, зело удобно изыскати может число всякие вещи, А как число вещей и вещам число цены изыскивати, и о том, читая в предисловии к читателю, совершенно познаеши. В Москве в лето 7190».

До XV в. русские, как и многие другие народы, вели счёт годов от некоторого условно принятого начального года, названного «годом сотворения мира». Разница между этой старой эрой и новой 5508 лет, значит, при переводе даты года старого летосчисления в дату года нашего летосчисления первую нужно уменьшить на 5508 лет. Так, 7190 г. старого летосчисления (год напечатания указанной таблицы умножения) соответствует (7190—5508) 1682 г. нынешнего летосчисления. Так как эта книга является первой печатной математической книгой на русском языке вообще, то 1682 г. является важной датой в истории русского математического образования, годом зарождения печатной математической литературы в России.

Приводим предисловие к этой книге (по первоисточнику).

«К читателю». «Сия книжка, читателю любезный, надобна человеку для скорого всякие вещи цены обретения, которую кто купити или продати хощет. А мера и цена за сколько чего сколько денег дати или взяти объявляется в сей книжке на всякой странице в верхних, да и в посторонних (крайних) первых строках в клеточках. И можно считати всякие вещи, хотя (желая) меру положити, сколько чего продает или покупает в верхней строке, а цену в посторонней. Или цену положити, сколько чего купити или продати в верхней строке, а меру в посторонней, сице (так): если меру положишь в верхней строке, а цену в посторонней строке, и ты от того числа пойди рядом клеточками и дойди до той клеточки, которая стоит против верхнего числа, которое число меру показывает, и стани (остановись): и сколько в той клеточке будет числ, столько будет за тот товар и цены копейками, или алтынами, или гривнами, или рублями.

А если меру положишь в посторонней первой строке и ты цену положи в верхней строке и пойди вниз прямо от того числа клеточками же и дойди до той клеточки, которая стоит противу постороннего числа, которое значит меру, и стани: и сколько в той клеточке стоит числом, столько за тот товар цены будет копеек, или алтын, или гривен, или рублёв.

И о сем, читателю, буди тебе известно, что в сей книжке положено счёту, краткости ради, только одно сто. А если мера или цена превзойдет число счёта, который положен в сей книжке, и тому возможно по сему же счёту, меру и цену, умножая, хотя многие тысячи, счести. Здравствуй, и о трудящихся в сем моли Бога».

Приведено это предисловие, объясняющее метод использования таблицы, буквально, чтобы показать, как нелегко было современнику книги 1682 г. учиться.

Всё содержание этого объяснения сводится к тому, что в первом слева столбце страниц идут числа от 1 до 100, так же в первой строке вверху страниц. В клетке, находящейся на пересечении любой строки и любого столбца, стоит произведение чисел, стоящих в первом столбце и в первой строке, соответствующих клетке на пересечении. Если число первого столбца

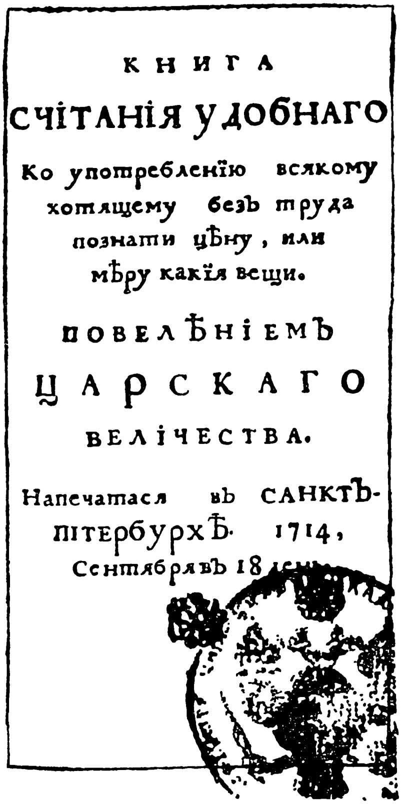


Рис. 67. Титульный лист.

[102]

	91	92	93	94	95
81	7371	7452	7533	7614	7695
82	7462	7544	7626	7708	7790
83	7553	7636	7719	7802	7885
84	7644	7728	7812	7896	7980
85	7735	7820	7905	7990	8075
86	7826	7912	7998	8084	8170
87	7917	8004	8091	8178	8265
88	8008	8096	8184	8272	8360
89	8099	8188	8277	8366	8455
90	8190	8280	8370	8460	8550
91	8281	8372	8463	8554	8645
92	8372	8464	8556	8648	8740
93	8463	8556	8649	8742	8835
94	8554	8648	8742	8836	8930
95	8645	8740	8835	8930	9025
96	8736	8832	8928	9024	9120
97	8827	8924	9021	9118	9215
98	8918	9016	9114	9212	9310
99	9009	9108	9207	9306	9405
100	9100	9200	9300	9400	9500

Рис. 68. Половина последней страницы.

есть число фунтов товара, то надо в первой верхней строке искать цену, в клетке на пересечении соответственных строки и столбца стоит число, выражающее стоимость товара. Но можно число фунтов искать в верхней первой строке, а цену — в первом столбце.

Книга, напечатанная славянским шрифтом и в славянской нумерации, нашла применение.

В 1714 г. вышло второе издание её гражданским шрифтом и с индийскими цифрами под заглавием: «Книга считания удобного ко употреблению всякому хотящему без труда познати цену, или меру какия вещи. Повелением царского величества. Напечатася в Санктпитербурхе 1714, Сентября в 18 день».

Сведения о судьбе этой книги разноречивы. А. В. Гаврилов («Очерк истории Санкт-Петербургской синодальной типографии», 1911, стр. 39) пишет, что «Книга считания удобного» была напечатана в количестве 40 штук, по 5 алтын каждая. Академик П. Пекарский («Наука и литература в России при Петре Великом», т. II, 1862, стр. 330) указывает, что в 1715 г. книга эта в Петербургской типографии была в количестве 980 экземпляров и что в 1717 — 1721 гг. в книжной лавке в Петербурге отпущено 678 экземпляров, а в 1752 г. в Московской типографии употреблено на обёртку 566 экземпляров этой же книги, оценённых каждый по 13 копеек. Тираж, указанный первым историком, конечно, неверен. Книга уже не отвечала потребностям русской действительности и поэтому не нашла достаточного числа покупателей. Судьба обоих изданий и сравнение предисловий по стилю и содержанию может служить некоторой иллюстрацией изменений в уровне запросов в области математики со стороны русского общества за бурное тридцатилетие петровских реформ.

Для иллюстративного сравнения обоих изданий приводится предисловие ко второй книге (1714), опять-таки буквально по первоисточнику.

«Сия книжица, благоразумный читателю, потребна ради скорого обретения цены всякия вещи, которую хощешь продати или купити, или восхощешь что измеряти какую вещь, например, сукно или что иное, и положи первее меру в первой верхней строке поперёк таблицы, а цену в первой же строке в длину таблицы, и аще хощеши ведати, например: тридцать пять аршин по двадцати по девяти алтын. И оное число меры разыщи на странице, где число 35 в верхней строке в ширину таблицы, а цену положи в той же таблице на первой строке 29 в длину таблицы, и смотри прямо от двадцать девятого числа до той линии, в которой вверху положил меру сукна, и обрящеши цену 35 аршин по двадцати девяти алтын, тысяча пятнадцать алтын. Аще же хощеши положити цену в верхней строке, а меру в посторонней, и ты изволь таким же образом сыскивать, пойти прямо по линии от числа меры до линии числа цены, и обрящеши правдивое число цены подобне — придёт за тридцать пять аршин по двадцати по девяти алтын.

И тако по сей книжице возможешь цену всякую выложити от малые цены и до большия, хотя копейками, или алтынами, или гривнами, или рублями.

И тако, благоразумный читателю, изволь сию малую книжицу в великий дар себе прияти, аще и мала есть и малый счет имеет, токмо едино сто, обаче благоразумием своим по сему счету можеши и до ста тысящ познати, умножая меру и цену. Например, аще купил триста аршин сукна, и ты положил перво за едино сто цену, и колико за едино сто приидет числом цены, толико и за прочие за два ста, и тако цены всех трех сот известен будеши.

Нашего же сего труда не вмени яко ленивства ради малое число написахом, но дабы прилежный всяк из малой вещи в большее себе прилежание принуждал и недовольствовался бы чюжею премудростью, но сам пифагором стал.

Нам же труждающимся аще и случилось в деле сем погрешити, благоразумием своим изволь простити».

Потребность в таблицах умножения, подобных первенцу русской печатной математической литературы, вызывала и вызывает до сих пор издание их.

В 1796 г. выходит книга «Арифметик без пера и карандаша и без поверки, или Удобнейший способ скоро и без ошибки сделать всякой счёт в продажах, покупках, мерах и весах, и узнавать цену, сколько за всё заплатить или получить должно денег, и как всякую вещь разделить на равные части, не употребляя обыкновенных щётов и Арифметики, с приобщением наставления, каким образом употреблять сию книжку. Иждивением Михаила Саеннова» (М., 1796, 2+XII+109 страниц малого формата).

Небезынтересно предисловие автора этой книги, весьма близко напоминающей своих предшественниц.

«Она издаётся в свет в осьмуху для того, чтобы способно было поместить её в карман (такой же формат имела «Книга считания удобного» 1714), и чрез то во всякое время и везде иметь при себе способ счесть, что потребно будет. В таком случае и искусному в Арифметике, когда нужных к тому орудий иметь не будет, может служить с пользою; а разумеющим на щётах, поелику всегда их при себе иметь не можно, и того нужнее. Впрочем, для тех, которым нужно других руководство, я предложил довольно, а разумеющих больше меня я не учитель».

После издания таблиц и книг «считания удобного» и «содержащих способ счесть, что потребно будет» выходит в начале XIX в. большая книга берлинского академика Грюзона: «Описание таблиц всеобще полезных, для умножения и деления изобретенных академиком берлинским Иваном Филиппом Грузоном. С приобщением таблицы всем делителям простым от 1 до 10 500. Переведённое коллежским асессором Петряевым. Печатано по высочайшему повелению». Санкт-Петербург, 1808, 50+415 страниц. Это первое издание на русском языке таблиц простых делителей составных чисел. Грюзон (1768—1857) — очень плодовитый автор сочинений с высокопарными заглавиями. Переводчик, норвежский математик Абель, пишет о нём в 1823 г. из Берлина: «Прочёл массу Грюзона: это ужасный бахвал, однако доказал иррациональность числа e».

В XIX в. на русском языке появилось большое число арифметических таблиц как переводных, так и оригинальных.

6. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Общие замечания

Содержание курса арифметики в разные времена и у разных народов было весьма различно. Индийцы, например, причисляли извлечение кубического корня к элементарным арифметическим операциям. С другой стороны, руководство Пурбаха (1423—1491), первого профессора Венского университета, читавшего лекции по математике, содержат только материал, изучаемый ныне в начальной школе.

Далее действий с дробями и тройного правила не шли и учебники для германских университетов начала XVI в.

Л. Магницкий, определив арифметику, или числительницу, как «художество честное, независимое и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее», рассматривает в своей книге **пять «пределений»**, или арифметических действий: **нумерацию,** или счисление, **аддицию,** или сложение, **субтракцию**, или вычитание, **мультипликацию** еже есть умножение и **дивизио** еже есть деление».

Различно было понимание того, что называется арифметическими действиями. В латинских учебниках, которыми в течение нескольких веков пользовались школы всех народов, эти действия назывались species — виды (действия). Это наименование определения арифметических действий впервые встречается в рукописях XIII в. В XVI в. оно становится общеупотребительным и вытесняет термин pars arithmetica (часть арифметическая).

Индийские математики рассматривали шесть арифметических действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в степень и извлечение корней. Сакробоско (XIII в.) имеет их девять, как и многие авторы последующих веков: нумерация, сложение, вычитание, удвоение, умножение, медиация (деление пополам), деление, прогрессия, извлечение корней.

Действие «прогрессия» рассматривало в большинстве случаев суммирование чисел натурального ряда, в редких случаях суммирование отдельно чётных и нечётных чисел натурального ряда, и лишь в исключительных случаях суммирование двух простейших геометрических прогрессий 1, 2, 4, 8,... и 1, 3, 9, 27,... Извлечение корней ограничивалось в большинстве случаев только квадратными корнями. Действие «нумерация» вошло в учебники в качестве особого арифметического действия в эпоху, когда борьба между сторонниками римского и индийского способов счисления была злободневной (XIII и XIV вв.).

Действие «удвоение» ведёт своё начало из Египта. Как уже указано, основные сведения о египетской математике черпаются из папируса Райнда, написанного писцом Ахмесом в эпоху 1800 — 1600 гг. до н. э. Он описан в главе о египетской нумерации. Задачи Ахмеса порой настолько абстрактны, что не возникали непосредственно из практики.

Наши четыре действия над числами египтяне выполняли сложением, удвоением и делением пополам. Удвоение являлось основной операцией. Из прямых операций употреблялось ещё только увеличение в десять раз. Вычитание выполнялось дополнением вычитаемого до уменьшаемого, деление — удваиванием.

Вот примеры египетского умножения и деления:

$$\begin{array}{rr} 17\times 13 & \\ 1 & *\ 17 \\ 2 & 34 \\ 4 & *\ 68 \\ 8 & *136 \\ \hline 13 & 221 \end{array} \quad [117\times 13 = 17\times(1+4+8) = 221].$$

Произведение 17×13 получается сложением отмеченных звёздочками результатов, полученных удвоением. Складывая эти числа, мы берём 17 слагаемым $(1+4+8)$ 13 раз, что составляет умножение 17 на 13.

Деление 19 : 8 египетский автор выполняет следующим образом:

$$\begin{array}{rr} 1 & 8 \\ *\ 2 & 16 \\ \frac{1}{2} & 4 \\ *\ \frac{1}{4} & 2 \\ *\ \frac{1}{8} & 1 \end{array} \qquad \text{О т в е т: } 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Отмеченные звёздочками числа первого столбца показывают, что 8 надо взять $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ раз, чтобы получить 19, так как соответствующие отмеченным числам числа второго столбца в сумме дают:

$$16+2+1=19; \quad 19:8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Египтяне писали сумму без знаков +, в виде $(2\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{8})$, как это делали многие другие народы.

Греки, хотя и знали действие умножения, в житейской практике обычно употребляли египетский метод удвоения.

В качестве особых арифметических действий ввёл удвоение и медиацию в свой учебник неоднократно упоминавшийся ал-Хорезми (начало IX в.), пропагандировавший индийское счисление. Так как индийцы этих действий не употребляли, то в этом нужно видеть собственную идею ал-Хорезми или влияние Египта через арабов. Через перевод книги ал-Хорезми в XII в. на латинский язык эти действия вошли и в первые европейские руководства Иордана Неморария (XIII в.) и через него в монастырские школы. Лишь в конце XV столетия итальянский автор Лука Пачоли заявляет, что удвоение и раздвоение чисел являются частными случаями умножения и деления и отбрасывает их из числа арифметических действий. Учебники для монастырских и соборных школ продолжали сохранять эти действия.

Христиан Вольф.

Из представителей университетской науки первыми от лишних действий отказались видные деятели математического образования в XVI в. Грамматеус (Шрейбер умер в 1525 г.) в Венском университете и Гемма Фризиус (умер в 1555 г.) в Лувене Последний впервые даёт определение: «Арифметическим действием (species) мы называем способ нахождения числа». Однако даже передовой для своего времени учебник «Начала» Вольфа ещё в 1754 г. указывает, что число можно умножить без заучивания таблицы умножения — удвоением и сложением результатов.

Первое русское издание книги Вольфа 1770 г. («Сокращение первых оснований мафиматики») этого указания уже не содержит и ограничивается указанием: «Кто хочет иметь способность скоро умножение делать, тому должно пифагорову решётку (таблицу умножения) наизусть выучить и покамест на память не затвердится, иметь перед собой» («Сокращение и т. д.», стр. 17).

Удвоение и египетский способ умножения при помощи удвоения оказались очень живучими и удержались в практике до последнего времени. В зарубежной литературе этот способ умножения в наши дни неоднократно описывался как «Способ умножения чисел, применяемый русскими крестьянами».

Пусть требуется умножить 37 на 32. Составим два столбца чисел — один удвоением, начиная с числа 37, другой раздвоением, начиная с числа 32:

37 32
74 16
148 8

$$\begin{array}{rcl} 296 & \ldots\ldots & 4 \\ 592 & \ldots\ldots & 2 \\ 1184 & \ldots\ldots & 1 \end{array}$$

Произведения всех пар соответственных чисел одни и те же, поэтому

$$37 \cdot 32 = 1184 \cdot 1 = 1184.$$

Второй пример: найти произведение $47 \cdot 37$.

Поступаем так же, как в приведённом выше примере, лишь во втором столбце при раздвоении пишем только целую часть частного (когда делимое нечётное) и отмечаем звёздочкой те строчки, в которых деление совершилось с остатком 1, и последнюю. Имеем:

$$\begin{array}{rcl} 47 & \ldots\ldots\ldots & 37^* \\ 94 & \ldots\ldots\ldots & 18 \\ 188 & \ldots\ldots\ldots & 9^* \\ 376 & \ldots\ldots\ldots & 4 \\ 752 & \ldots\ldots\ldots & 2 \\ 1504 & \ldots\ldots\ldots & 1^* \end{array}$$

Если бы при делении на 2 чисел второго столбца остатков не было, то произведение равнялось бы числу 1504. В данном же случае мы действовали так, как будто вначале было не $47 \cdot 37$, а $47 \cdot 36$, а в третьей строке не $188 \cdot 9$, а $188 \cdot 8$. Мы отбросили по одному разу 47 и 188, а поэтому верное произведение получится, если к числу 1504 прибавить 188 и 47, т. е.

$$47 \cdot 37 = 1504 + 188 + 47 = 1739.$$

Порядок изучения четырёх арифметических действий предлагался в разные времена различный. У Леонарда Пизанского действия изучаются в порядке: умножение, сложение, вычитание, деление; у Петра Борги (1484) — умножение, деление, сложение, вычитание.

Начать изучение арифметических действий с умножения было предложено на одном из международных философских конгрессов ещё в начале нынешнего столетия. Против предложения резко выступил В. В. Бобынин. Кёбель (1515) подчёркивает равноценность всех четырёх действий, Грамматеус (1518) отмечает взаимозависимость сложения с умножением, вычитания с делением. Мисрахи (умер в 1528 г.) рассматривает умножение как частный случай сложения и не включает его в число арифметических действий, так как оно представляет лишь способ сокращённой записи.

Различение арифметических действий по ступеням делает впервые Непир (1550—1617) в книге «Логистическое искусство», которая была напечатана впервые лишь в 1839 г. Непир считает умножение и деление действиями более высшего порядка, чем сложение и вычитание; третью ступень действий составляют возвышение в степень и извлечение корней.

Наиболее древние индийские памятники свидетельствуют о том, что в Индии четыре арифметических действия выполнялись почти так же, как мы их выполняем в настоящее время. Вследствие того что жители Индии писали на посыпанных песком дощечках, на которых можно было легко «стереть» ненужную цифру, они производили действия слева направо. При письме же на бумаге при таком порядке действий возникала необходимость перечёркивать ставшую ненужной или неверную цифру, писать над ней или под ней действительную. Этот приём был введён арабами и от них перешёл к европейцам; неудобство его отмечает уже Максим Плануд (1310).

С XV в. в Европе входят в употребление наши способы вычисления, не требующие зачёркиваний цифр (сначала в Италии). В «Алгорифмическом трактате» Белдоманди (1410) отличается от наших способов выполнения арифметических действий только деление. Способ перечёркивания цифр «немецким манером» (more Alemanorum), которого придерживались в Германии, уступил место итальянскому (more Italorum), после того как последний способ приняли виднейшие европейские математики XV в. Гмунден, Пурбах, Региомонтан.

7. ОБОСНОВАНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ В ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКАХ

В средние века авторы учебников не касались вопроса об обосновании арифметических действий. В Европе Тарталья (XVI в.) первым поднимает этот вопрос, предпосылая арифметическим действиям систематические упражнения на таблицы сложения, вычитания, умножения и деления. Мы уже упоминали, что армянский математик Ананья из Ширака в VII в., почти на тысячу лет ранее, делал то же. Однако ещё в течение веков после Тартальи авторы вводят в свои учебники для действий много приёмов и сводят обучение к механическому выполнению образцов. Они поступают, по существу, так же, как делал египетский автор за 4000 лет до этого, который начинал решение каждой задачи словами: «Делай, как делается», иными словами: «Делай, как люди делают». Грамматеус (1518) первый подчёркивает необходимость соблюдения аккуратности письма цифр одной под другой и писания определённым образом (подведение черты под данными числами, подписывание результата под чертой и т. д.). Только в XVIII в. эти правила становятся общим требованием школы.

Доказательства предложений и обоснования правил давались до XVIII в. лишь в единичных случаях. Исключением является автор распространённых учебников бельгиец Андрей Такэ

(1612—1660). В предисловии к арифметике 1656 г. он справедливо указывает, что ввёл в свою книгу доказательства в количестве, в каком этого не делал ни один из предшествовавших ему авторов.

Только с начала XVIII в. в руководствах, которые назначались для университетов, доказательства стали до некоторой степени необходимой частью. Вольф высказывает требование: «Недостаточно учителю говорить истину; ученики должны понимать, что сказанное действительно является истиной... В арифметических объяснениях недостаточно показывать правила, при помощи которых получаются требуемые числа, но нужно дать понять, почему именно при помощи этих правил получаются требуемые числа» (предисловие к «Сокращению мафиматики»).

Что представляли иные доказательства того времени даже у такого передового автора своего времени, каким был Вольф, можно иллюстрировать выдержками из его книги. Книга эта подобна многим «основаниям математики» того времени; она содержала в части, посвящённой прикладной математике, разделы архитектуры и фортификации. В этих частях книги Вольфа находим, между прочим, следующее:

Аксиомы. I. Всякое здание должно быть твёрдо. III. Всякое здание должно быть полезно и удобно. IV. Всякое здание должно быть красиво и приятно.

Определение. Окно есть отверстие в стене, которым проходит свет в покои.

Примечание. Чего ради в окнах стены должны быть с откосами внутрь покоев, а вышина окон больше ширины, чтобы свет по всему покою мог распространяться.

Феорема III. Ширина окна должна быть такая, чтобы двум человекам смотреть можно было.

Доказательство. Причина сего состоит в удобности, что двум веселее смотреть ради беседы, нежели одному.

Присовокупление. Чего ради окна в домах простых людей такой ширины не делаются, какой должны быть в домах людей лучшего основания.

Феорема VIII. Окно от полу выше трёх футов быть не должно.

Доказательство. Окно должно быть так сделано, чтоб из него свободно смотреть было можно (теорема III), но легче смотреть, облокотившись на окне, нежели стоя прямо. Следовательно, окно в таком расстоянии от пола быть должно, чтобы, наклонясь, облокотиться можно было; чего ради выше трёх футов быть не должно.

Феорема X. Высота покоев должна быть не гораздо велика и не гораздо мала.

Доказательство. Топление гораздо высоких покоев становится дорого, и никогда как должно теплы не бывают. А гораздо низкие вредительны здоровью; ибо людские испарины и других вещей к распространению своему не имеют довольно места.

В военном отделе «Оснований мафиматики» Вольфа читаем:

Феорема. Отражение неприятеля от укрепления должно производиться тем сильнее, чем ближе он подходит.

Доказательство. Чем ближе подходит неприятель к укреплению, тем более опасность; чем более опасность, тем более должно оказывать сопротивления неприятелю, дабы отразить его нападение и, поскольку возможно, освободиться от опасности, что и требовалось доказать.

Интерес представляет сопоставление учебников европейских авторов с русскими учебниками первой половины XVIII в.

«Арифметика, сиречь наука числительная» Леонтия Магницкого 1703 г. состоит из двух частей: 1) «арифметика-политика», или гражданская, и 2) «арифметика-логистика» — «не ко гражданству токмо, но и к движению небесных кругов принадлежащая».

«Арифметика-политика», по словам автора, есть «числение, сочинённое в толиком удобном образе, яко кийждо может исчислити всякое исчисление, великое и малое, в продажех и куплях, мерах и весах, и во всякой цене и во всяких деньгах во вся царства всего мира... «Арифметика-логистика», яже свойственнее небесных движений арифметика глаголется... логистика бо того ради нарицается, зане не имеет подлежащих вещей наручных и в гражданстве обносимых, паче же к движению небес принадлежащая, чего ради гречески астрономская зовется». Включает в свою книгу «арифметику-логистику» автор «двою ради вин (по двум причинам И. Д.), первее, да арифметика чин свой и во всем потребный нам конец и совершение приимет, яко арифметика не токмо во гражданских и наручных нам вещах может пребывати и действовати, но и в тех, яже токмо уму нашему подлежат. Второе, яко в настоящая нынешняя времена есть потребнейшая паче в нашем всероссийском государстве, неже в преждебывшая... зане без познания (её правил И. Д.), не будет совершен геометрик (геометрия бо зело есть потребна во всем обществе народа), ни же инженер может быти, без неё же невозможно быти ратоборству. Паче же навигатор... без сея науки не может бо добре кораблеходствовати и к желаемому пристанищу достигнути и уреченное место получити». Автор отмечает, что в «арифметике-политике» «аще и не зело довольно, обаче положихом о прогрессии и о радиксах и некая чрез них действа»; он излагает эти и другие дополнительные сведения в «арифметике-логистике» «и того ради, зане не всякому общенародному человеку есть сия потребна, яко купцем, икономам, ремесленникам и таковым, но токмо тщаливейшим или негли кто такову должность имеет».

В зависимости от этой целеустановки автор первую часть книги, «назначенную для всех граждан исчислити всякое исчисление в продаже и куплях», излагает без доказательств, рассказом и показом, без логических обоснований.

Переходя к «арифметике-логистике», которая должна решать и задачи абстрактные, «токмо уму нашему подлежащие», или «к движению небес принадлежащия» (вопросы мореплавательной астрономии И. Д.), автор заявляет, что эти задачи решить при помощи «арифметики-политики» является невозможным, «занеаще начнем, что от правил и чина тоя чрез арифметику (гражданскую И. Д.) действовати, **основания же и откуду что взято не будем знати, будет весь последующий чин не известен и не полезен, паче же и действовати тако безместно есть»**, т. е. без обоснований всё последующее построение будет непрочно и бесполезно, и так поступать будет неуместно.

Через тридцать лет после выхода в свет «Арифметики» Магницкого в Петербурге создаётся новый учебник арифметики для русской школы, которым начинается совершенно новый этап в эволюции школьных руководств по математике. Речь идёт о «Руководстве к арифметике для употребления гимназии при Академии наук», переведённом «чрез Василья Ададурова, Академии наук адъюнкта, 1740 г.». Книга эта была написана Л. Эйлером в России специально для академической гимназии, единственного в то время у нас правительственного общеобразовательного среднего учебного заведения. Автор обращается «К читателю»:

«Число арифметических книг, которые в разных государствах на свет изданы, так велико, что многим сей труд мог бы весьма ненужен показаться. Но понеже по указам её императорского величества Российское юношество как в арифметике, так и в геометрии с крайним прилежанием должно обучаться, то произошли бы превеликие затруднения, ежели бы кто в других землях сочинённые книги на то хотел употреблять... В другом государстве напечатанные книги для многих причин того труда недостойны показались, чтобы их здесь переводить и перепечатывать... ибо содержат оне или одни только правила, а о основании, на котором те правила утверждаются, не упоминается в них ни одним словом. А понеже известно, что **арифметика, когда она без основания и без доказательства показывается, недовольна ни к разрешению всех случаев, ни к поощрению человеческого разума, о чём надлежало бы ещё и наипаче старатися:** того ради потщились мы в сем руководстве основание всех правил и арифметических действий так предложить и истолковать... что чрез сие расположение молодые люди не только надлежащую твёрдость в арифметике получить могут, но и при всяком арифметическом действии праведное основание и причину видеть будут, а через то и сами к основательному размышлению помалу приобыкнут. Ибо ежели кто данные правилы совершенно разумеет, и при том их основание и начало, откуда они происходят, ясно познавает, тот некоторым образом приходит в состояние собственным своим рассуждением изобретать новые правила и по оным такие задачи решить, к которым обыкновенные правила сами по себе недо-

Рис. 69. Титульный лист «Арифметики» Магницкого.

вольны... К тому же всяк понимает то скорее и гораздо легче в памяти содержит, чего основание и начало ясно усматривает, и при том может оное при всех случаях лучше употреблять в свою пользу... Чего ради **в сем руководстве произведены все арифметические правила и действия от самого свойства чисел и употребительных знаков** таким образом, что всяк и без особливого в том наставления арифметические действия понять и в употреблении оных надлежащую способность получить, а притом и основание, на котором они утверждаются, совершенно познать может».

Аналогичную мысль высказывают другие авторы первых русских руководств (С. Румовский, Сокращения математики, ч. I, 1760).

Естественно стремление посмотреть, не остались ли эти хорошие обещания и пожелания только на страницах учебников.

Будучи далеки от идеализации преподавания математики в русской школе того периода, не можем не признать, что разумную постановку преподавания в русской школе отмечали иностранцы, бывавшие в России. Один из них, доктор философии и медицины голландец Михаил Шенд Фандербек, в 1725 г. противопоставляет обучение в российских «академиях», как он называет школы, обучению в схоластических школах Запада, где, по его словам, детям, «у которых ещё не утвердились во рту челюсти, приказывают грызть необглоданные кости» («О состоянии просвещения в России в 1725 г.», «Сын отечества», 1842, т. I, стр. 16).

8. ЗАКОНЫ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Переместительный, или коммутативный, закон, как свойство сложения и умножения чисел, с древности принимается как очевидный и не вызывающий никакого сомнения. Евклид в 16-м предложении книги VII «Начал» доказывает равенство $a \cdot в = в \cdot a$, притом совсем без геометрического облачения его, столь обычного для него в первых книгах. Термин «коммутативный» ввёл Сервуа (1814).

Сочетательный, или ассоциативный, закон сложения и умножения применялся также всеми. Для сложения доказательство его в целях строгого обоснования арифметики вводит Грассман в своём «Учебнике арифметики» (1861), представляющем первую попытку научного изложения оснований школьной арифметики.

Термин «ассоциативный» закон был введён Гамильтоном (1853) [52].

Распределительный, или дистрибутивный, закон умножения доказывает геометрическим методом Евклид в своих «Началах» (кн. II) в форме $aв+ac+ad+...=a(в+c+d+...)$. Словами Евклид формулирует его так: «Если даны две прямые линии (два отрезка) и одна из них разделена на произвольное число частей, то прямоугольник, заключённый между линиями, равен (равновелик) прямоугольникам из неразделённой прямой и отдельных частей другой». Далее Евклид доказывает отдельно, что $(a+в) \cdot a = a^2 + aв$.

9. СИМВОЛЫ В МАТЕМАТИКЕ

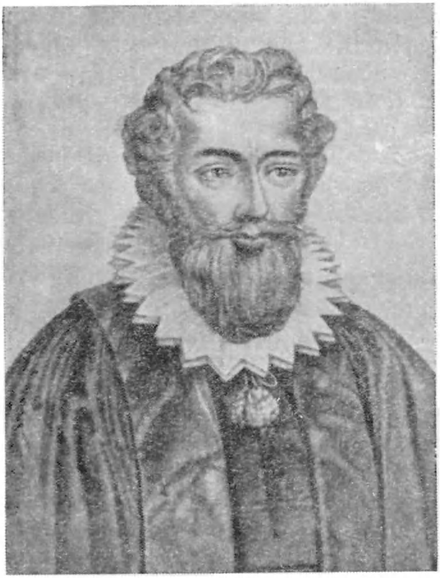
Историческому обзору возникновения арифметических символов предпошлём краткие замечания о возникновении буквенной символики в математике вообще. В эволюции математики (в частности, алгебры) различают три ступени: **риторическую, синкопирующую и символическую.**

Риторическая, или словесная, математика не пользуется символами. На этой ступени находилась греческая математика до Диофанта (III в. н. э.), арабская математика и европейская математика почти целиком до XIV в. Однако у вавилонян и египтян имеются особые знаки для некоторых математических понятий: у вавилонян это иероглифы мёртвого для них древнешумерского языка, у египтян иероглифы: скарабей для понятия «составляет, будет, равно», ноги, идущие против направления чтения, для понятия «больше», уходящие ноги — для понятия «меньше» и др. Неизвестное, искомое, «куча» обозначается иероглифом совы.

Синкопирующая математика употребляет для обозначения часто встречающихся понятий отдельные буквы или сокращения соответственных слов. Так, Диофант употребляет для обозначения искомого числа букву «сигма» со штрихом (по мнению других, это сокращение αρ, первых букв слова αρίτμος — число), обозначает отвлечённую единицу через μ^{σ}. Если перед неизвестным стоит числовой коэффициент, то Диофант пишет двойную букву «сигма» со штрихом. Для степеней (до шестой) неизвестного и обратных им величин имеются также у Диофанта сокращённые обозначения. Для сложения не имеется особого знака, так как, подобно древним народам, числа, написанные рядом, считались слагаемыми, как это мы продолжаем делать до сих пор в смешанных числах, когда пишем $3^1/_2$ вместо $3 + \frac{1}{2}$. Для обозначения вычитания Диофант употребляет перевёрнутую букву ψ (пси); знак этот имеется уже у Герона (I или II в. н. э.). Знака умножения у Диофанта нет, так как он употребляет только числовые коэффициенты; деление обозначалось словесно.

Индийские математики обозначают математические понятия первыми буквами соответственных слов; это ещё стадия синкопирующей математики.

Символическая математика начинается в XV в. Лука Пачоли (1494) употребляет ещё *p* и *m* для обозначения плюс и минус,



Франсуа Виет.

но в конце века появляются в печати знаки + и —, о которых будет речь в дальнейшем.

Введение в математику настоящей буквенной символики — заслуга француза Виета (1540—1603), хотя и Леонардо Пизанский (1228) пишет уже: «*a* лошадей в *f* дней съедают *e* мер овса» и т. д. Так же и ещё в большей мере поступает его современник Иордан Неморарий.

Искомое число, или неизвестное, в иероглифическом письме египтян имело особое обозначение (сова). В иератическом (жреческом) письме египтян, на котором написаны все дошедшие до нас египетские математические памятники, для неизвестного имеется особый знак, который обычно расшифровывается словом «куча». Появляется и термин «другая куча» для второго неизвестного, чего нет у Диофанта. Индийцы обозначали разные неизвестные сокращениями от названий разных цветов. Арабы называли первую неизвестную «вещь», вторую — «часть, мера, количество». По арабскому образцу возникли названия для неизвестного в европейской математике: res — вещь у Леонардо Пизанского, cosa — вещь у Луки Пачоли, которую он обозначает буквами co. Отсюда возникло первоначальное название алгебры в Европе — «коссическое искусство» или «косс», упоминаемое и Магницким.

Виет обозначает неизвестные большими гласными буквами, известные — согласными, искомое — буквой N (Numerus), квадрат его — буквой Q (Quadratus), куб — буквой C (Cubus). Так он пишет:

$$NC - 3\ N\ \textit{aequatur}\ 1,$$

$$\text{т. е. } x^3 - 3x = 1.$$

Англичанин Харриот (1631) заменяет большие буквы малыми. Наконец, Декарт (1596—1650) предлагает известные числа обозначать первыми $a, b, c\ldots$, неизвестные—последними буквами алфавита x, y, z. Вопрос о том, почему из этих букв x получил преимущественное употребление для обозначения неизвестного, нельзя считать достаточно ясным.

Первые авторы книг по алгебре обозначали неизвестное курсивным символом, который напоминает латинскую букву r (от res или radix — корень), однако с крючковидным придатком, сближающим этот символ с буквой x. Декарт в ранних работах чаще всего употреблял для обозначения неизвестного букву y, но в дальнейшем букву x; так, ось абсцисс он обозначал буквой x. Голландский математик Худде (1628—1704) заявлял, что он «неизвестное всегда будет обозначать буквой x, хотя некоторые авторы предпочтительно употребляют z».

Некоторые историки математики полагают, что предпочтение знаку x перед y и z является следствием более частого употребления в словах латинского и французского языков буквы x, чем y и z, почему типографии имели больший запас литеры x, чем литер y и z. Для обозначения столь часто встречающегося в математических трудах неизвестного и стали употреблять x. Это лишний пример того, как типографское материальное оборудование влияло на развитие математической символики. Не раз предложения о введении новых символов в математике не были осуществлены, так как для этого потребовалось бы снабдить сначала типографии новыми литерами, что часто было технически трудно осуществить.

Существует ещё и такое предположение: арабский термин shei — вещь (название неизвестного) — в средние века писался в форме xei и это слово сократилось в x.

На титульном листе «Арифметики» Магницкого читатель видит в руке Архимеда доску с надписью:

$$\begin{array}{l}
2R+1 \\
3R\div 2 \\
\hline
6q+3R \\
\quad\;\div 4R\div 2 \\
\hline
6q\div 1R\div 2
\end{array}$$

После сказанного о возникновении математической символики смысл этой записи ясен. Она обозначает (позже и в наши дни):

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 2x+1 \\ 3x-2 \end{array} \\
\hline
6x^2+3x\qquad \\
-4x-2 \\
\hline
6x^2-x-2
\end{array}$$

О знаке $\div$ вместо — (минус) будет сказано в дальнейшем.

В английских и американских учебниках употребляется знак $\therefore$ для обозначения слова «следовательно» [53].

10. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

До конца XVI в. руководства по арифметике не применяют систематически каких-нибудь символов, и авторы их не дают себе отчёта в значении их. Заслугой Лейбница является пропаганда этого понимания. Создание международных научных журналов в XVII и XVIII вв. выдвинуло вопрос о создании общих интернациональных символов.

Знаки сложения и вычитания

Знаки + и — появляются как бы случайно у Видмана (1489), Стифеля (1545), Риза (1550), производя впечатление, что они не «аборигены» (уроженцы) математики, а «пришельцы из других областей».

Возникновение этих знаков не ясно. Знак + у Видмана заменяет слово «и»: он пишет «$\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ шиллинга», а рядом «$\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$». Этот же знак употребляется им там, где не производится никакого сложения, например в заглавиях страниц: «правила увеличения + уменьшения». После неоднократного употребления знака — Видман заявляет: «— означает минус» (меньше, отнять) и тут же добавляет: «+ означает больше». В анонимной Бамбергской арифметике (1483) не встречается ни разу слово «плюс», но зато «минус» — многократно и в современном смысле. Употребление знаков + и — производит впечатление, что оно перенято из торговой практики для обозначения перевеса и недовеса. У Видмана эти способы записи торговой практики становятся математическими символами. В задаче, в которой надо найти стоимость одного яйца, Видман допускает запись: 8 яиц — 2 пфеннига» равно «4 пфеннига + + яйцо».

Внедрению в употребление знаков + и — содействовали главным образом созданные к тому времени первые учебники алгебры. В два последних десятилетия XV в. знаки + и — получили довольно широкое распространение в математических руководствах.

Первой печатной книгой, содержащей изложение приёмов вычислений с применением знаков + и —, является руководство Грамматеуса (1518). В других странах содействовали введению этих символов руководства Рикорда (1557), Аутрида (1631), Харриота (1631), Рамуса (1555), Виета (1579). Итальянские математики XVI в. Кардано, Тарталья, Бомбелли упорно придерживаются употребления букв p (плюс) и m (минус) вместо знаков + и —.

О том, почему именно знаками + и — стали обозначать понятия «прибавить или больше» и «отнять или меньше», существуют разные гипотезы. Правдоподобно происхождение знака + из слова et (и, да). Нематематические рукописи XIV и XV вв. употребляют часто для слова «и» знак, похожий на t.

Происхождение знака — (минус) объясняли переносом практического значка убыли из торговой практики. На родине Видмана винная торговля занимала большое место в деятельности населения. Проданные меры вина могли обозначать чёрточками на бочках, а восстановление в них запасов вызывало, естественно, перечёркивание соответственного числа чёрточек. Так могли в этом месте возникнуть знаки — и +.

Для избежания смешения знака — с обычным тире в XVII в. стали минус обозначать знаком ÷. Эту форму знака вычитания мы видим в алгебраической части «Арифметики» Магницкого; в арифметической части книги, когда данные числа пишутся одно под другим, Магницкий не ставит впереди никаких знаков действий. Соединённые знаки ± впервые появляются у Жирара (1626) в форме «$\overset{+}{\text{или}}$». Ясное различие двоякого смысла знаков, как знаков действий и как знаков положительных и отрицательных чисел, встречается впервые у Уилкинса (1800). Он употребляет знаки ± и — только как знаки действий, отрицательное число пишет в виде $\overline{3}$.

Знаки умножения и деления

Буквы *M* и *D* (Multiplicatio, Divisio) для обозначения умножения и деления употребляют Стевин (1548—1620) и некоторые другие авторы. Знак умножения × ввёл Аутрид (1631), возможно, по аналогии со знаком +. Запись умножения буквенных выражений без всякого знака между ними была уже у первых авторов алгебры и естественна при употреблении числовых коэффициентов. Точка в качестве знака умножения появляется у Региомонтана (1436—1476), затем у Харриота (1631). Сознательно и подчёркивая значение точки, как знака умножения, это делает Лейбниц (1693).

Горизонтальная чёрточка в качестве знака деления имеется у Леонардо Пизанского (XIII в.) и позаимствована им от арабов. Знак деления : впервые встречается у Джонсона (1633). Пелль (1610—1685) вводит знак деления ÷, употребляемый до сих пор нередко в Англии и Америке.

Скобки

Скобки возникли исторически главным образом при извлечении корня из многочленов. Шюке (1484) обозначает корень из многочлена, ставя перед ним перечёркнутую букву *R* и подчёркивая прямой чертой многочлен, из которого извлекается корень. Так же поступает ещё Бомбелли (1550). Круглые скобки появляются у Тартальи (1556). Бомбелли в печатном изда-

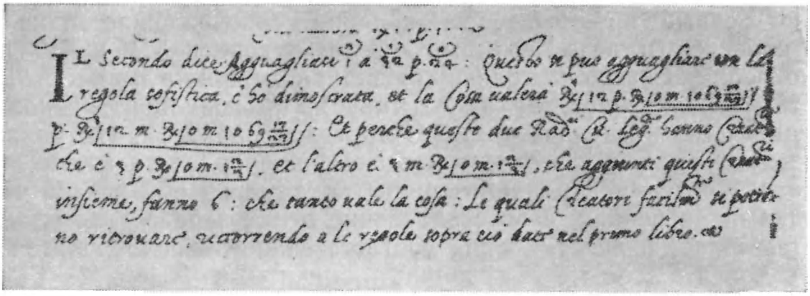


Рис. 70. Фотоснимок с рукописи Бомбелли (зарождение скобок).

нии своей «Алгебры» (1572) употребляет вместо круглых скобок латинскую букву L перед выражением, подлежащим включению в скобки, и перевёрнутую букву L — в виде 7 — в конце его, спуская эти знаки несколько ниже строки. Это начало употребления квадратных скобок. Независимо от извлечения корня скобки употребляет Стифель (1544), в большинстве случаев ставя их только перед выражением. Однако в течение всего XVII в. вместо скобок употребляли черту, которую проводили не под, а над многочленом. Так поступают последователи Декарта Харриот, Худде, Ньютон, вначале и Лейбниц, который, однако, позднее осознал пользу употребления скобок и ввёл их в своих сочинениях. Фигурные скобки употребляет впервые Виет (1593).

В латинских руководствах скобки назывались vinculi — оковы, цепи (общеупотребительный термин в XVII в.). Немецкий термин Klammer — скоба — введён Эйлером (1770) в Петербурге, откуда произошло и соответственное русское название «скобки».

Систематическое употребление скобок вошло в обыкновение не скоро. Заслуживает быть отмеченным, что в официальном органе Петербургской Академии наук уже в первом томе, напечатанном в 1728 г., академик Яков Герман — «высоких математических наук первый профессор» — употребляет скобки. В томе третьем «Петербургских комментариев» в последующие годы Эйлер и Даниил Бернулли пользуются скобками, круглыми и квадратными, в современном виде. Историк математических символов Кеджори отмечает, что петербургский поток статей и книг Эйлера, в которых повсюду употреблялись скобки, главным образом содействовал тому, что к середине XVIII в. скобки стали употребляться во всех математических книгах.

Знаки равенства и неравенства

Употребляемый в настоящее время знак равенства введён англичанином Р. Рикордом (1510—1558) в книге «Оселок остроумия» (1557) с обоснованием: «Никакие два предмета не могут в большей степени быть равны между собой, как две параллельные линии (отрезка)». Он, как и Магницкий, употребляет в качестве знака равенства два длинных параллельных отрезка. Этот знак вырезан на могильном камне Рикорда. Отметим небезынтересный для русского читателя факт, что книга Рикорда начинается с посвящения:

«Достопочтенным правителям, консультантам и остальной братии компании купцов-пионеров (авантюристов) торговли с Московией Роберт Рикорд, врач, желает здоровья с непрерывным возрастанием благополучия в их ценных и славных поездках».

Знак равенства $=$ не сразу и даже не скоро нашёл признание. Многие авторы XVI и XVII вв. употребляли для обозначения равенства знак $\|$ или сокращённое слово «равняется».

Декарт (1637)) вводит для обозначения равенства особый знак, который чуть было не вытеснил совсем знак $=$ у континентальных математиков. Принятие Лейбницем и его последователями знака $=$ в анализе и успех общей символики Лейбница обеспечили распространение знака $=$ в Европе.

Для обозначения неравенства предлагались в разные эпохи различные знаки; предложенные Харриотом (1631) теперешние знаки $>$ и $<$ получили быстро всеобщее признание.

Может показаться странным, что предложенный Рикордом знак для равенства $=$ долго не нашёл приёма, знаки же неравенства Харриота $>$ и $<$ были сразу приняты. Тут ещё раз сказалось влияние типографского оснащения на судьбу математической идеи.

В типографиях не было наборного знака $=$ и потому они не могли его дать в математических книгах; нужно было сначала заказать этот знак. В те времена это делалось нескоро. С другой стороны, для введения в употребление знаков $>$ и $<$ заказывать новые знаки не требовалось, так как в типографиях была латинская литера V, которая, будучи повёрнута на бок, давала знаки $>$ и $<$.

Как медленно самые элементарные символы входили в употребление, показывает следующий факт. В 1731 г. Стивен Хельс издаёт свои «Этюды по статике», большой, серьёзный труд, адресованный автором в первую очередь сочленам по Лондонскому королевскому обществу и подписанный к печати президентом общества Исааком Ньютоном. В предисловии к этой книге автор пишет: «Так как слышны жалобы о том, что употребляемые мной знаки многим непонятны (книга вышла вторым изданием), то я скажу: знак $+$ означает «больше» или «прибавить»; так, стр. 18, строка 4: «6 унций $+240$ гранов» означает то же, что сказать, к 6 унциям прибавить 240 гранов»; а на строке 16 той же страницы знак $\times$ означает «умножить»; две короткие параллельные линии означают «равняется», так $1820 \times 4 = 7280$, это всё равно, что 1820, умноженные на 4, дают (равны) 7280».

Беллавитис (1832) употребляет для обозначения равенства векторов особый знак, который употребляется некоторыми авторами и в настоящее время [53].

11. К ИСТОРИИ ОТДЕЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Сложение

Приёмы сложения чисел в современном виде возникли в Индии. Индийцы складывали многозначные числа слева направо, «стирая» без труда в числе, написанном в качестве суммы левой колонны, цифру, если нужно было её увеличить. Сложение слева направо рекомендовалось не раз и в европейской математике (Гаусс). Академик А. Н. Крылов («Мои воспоминания», 1945, стр. 75) указывает, что профессиональные вычислители всегда складывают числа по два и слева направо: такой способ гарантирует более скорый и более верный путь получения результата. То же утверждает академик Д. А. Граве («Начала алгебры», 1915, стр. 102).

Результат сложения в Индии писали не под колонками слагаемых, а над ними — приём, который встречается у греков и римлян. Индийский приём сложения усвоил Мухаммед ал-Хорезми в начале IX в. и передал его арабам и через них Европе.

Сакробоско (середина XIII в.), профессор математики и астрономии в Париже, внедряет в Европе через своё руководство правило складывать числа справа налево. **С XV в. правила сложения не отличаются уже от современных.**

Термин «**сумма**» употребляется в классической древности сначала не как название результата сложения чисел. **Суммой называлось основное число при всяких расчётах,** и оно записывалось первым, сверху, как долгое время записывалась сумма при сложении сверху. Ещё Леонардо Пизанский говорит: «сумма умножения», «сумма деления». Термин «сумма действия» для обозначения любого результата арифметических действий встречается в европейских распространённых руководствах до конца XVII в., например, в очень распространённом в течение столетия руководстве Каспара Шотта (1674). Оттенок такого значения слова «сумма» сохранился в нашем языке до сих пор: мы говорим о «денежной сумме» в случаях, когда никакого сложения не производим.

С конца XV в. слово «сумма» начинает употребляться и в специфическом значении результата сложения. Об этом свидетельствует появление слова «суммировать» рядом с глаголом «складывать, аддировать» уже у Видмана в учебнике 1489 г.

Термин «результат» происходит от латинского глагола resultare — происходить; resultatum — происходящее, произведённое.

В качестве математического термина слово «результат» впервые появляется у Петра Датского (1291).

Понятие «равняется» обозначалось латинским словом facit — делает, составляет. Это слово facit (фацит) в разных языках до сих пор обозначает результат вычислений. В этом же смысле употребляется термин «агрегат» (соединение).

Термин «слагаемое» (аддендум) встречается с XII в.

Вычитание

При выполнении действия вычитания применялись в разные времена два приёма: 1) отсчитывание от уменьшаемого единиц вычитаемого, 2) прибавление к вычитаемому такого числа, чтобы в сумме получилось уменьшаемое. Второй приём получил в новое время название австрийского способа.

Первый способ ведёт своё начало из Индии, где он выполнялся слева направо, что было практически нетрудно при лёгкости «стирания» подлежащей изменению цифры при индийском способе письма на посыпанных песком дощечках. При выполнении действия вычитания не на дощечке с песком пришлось ввести неудобный способ перечёркивания и надписывания цифр. Вот как выглядит вычитание по раннему переводу книги ал-Хорезми (по-видимому, сделанному Иоанном Севильским, XII в.):

	8	8
9	94	94 1
1) 12025	2) 12025	3) 12025
3604	3604	3604

Смысл записей следующий:

1) $12-3=9$; результат записывается сверху, использованные цифры вычёркиваются.

2) 6 (сотен) из 0 (сотен) вычесть нельзя; берётся от полученного числа 9 (тысяч) одна; 10 сотен — 6 сотен $=4$ сотни; перечёркивается 9, равно как использованные цифры 0 и 6, надписываются 8 и 4.

3) 2 десятка $-0=2$ десятка, перечёркивается лишь 0.

4) $5-4=1$, перечёркиваются 5 и 4 и надписывается 1, получается в виде числа из неперечёркнутых цифр 8421. Вычислитель, знакомый с методом, писал только третий этап записи.

В приведённых примерах и в последующих вычёркивание цифр не показано. Следует это проделать самому читателю.

Западные арабы ввели правило начинать вычитание от правой руки, однако в Европе ещё Рамус (конец XVI в.) рекомендует начинать вычитание слева.

Понятие «вычитать» греки и римляне обозначали разными терминами житейского языка, не имея специального термина. Термин subtractio (у Магницкого «субтракцио или вычитание») появляется у Боэция. Термины «уменьшаемое», «вычитаемое» (число) появляются у Вольфа (1716). Магницкий их не употребляет.

Термин «слагаемое» (аддендум) встречается с XIII в.

Термины «остаток», «избыток» для обозначения результата вычитания имеются у Герберта (X в.), Леонардо Пизанского (XIII в.), но не имеют ещё характера специального термина. Термин «разность» — differentia — в смысле результата вычитания впервые употребляет Видман (1489).

Умножение

Действие умножения рядом со сложением является одним из оснований нумерации; в качестве особого арифметического действия умножение стало рассматриваться сравнительно поздно. Египтяне, как сказано выше, производили умножение чисел удвоением и сложением результатов удвоения. Вавилоняне умножали при широком применении таблицы в шестидесятеричной системе.

От греческого умножения сохранились примеры в комментариях Евтокия (480 г. н. э.) на вычисление площади круга Архимедом, пример умножения с шестидесятеричными дробями у Теона Александрийского (около 365 г. н. э.) и умножение смешанных чисел у Герона (I или II в. н. э.). Вот пример умножения Герона.

Надо найти произведение:

$$3\,\frac{63}{64}\cdot 7\,\frac{2}{64}.$$

Решение: $3\cdot 7=21; 3\cdot\frac{2}{64}=\frac{6}{64}; \frac{63}{64}\cdot 7=\frac{441}{64}.$

$$\frac{63}{64}\cdot\frac{2}{64}=\frac{126}{64}:64=\frac{1}{64}+\frac{62}{4096}.$$

$$\text{Вместе: } 21+\frac{6}{64}+\frac{441}{64}+\frac{1}{64}+\frac{62}{4096}=21\,\frac{448}{64}+\frac{62}{4096}=$$

$$=21+7+\frac{62}{4096}=28\,\frac{62}{4096}.$$

Значительное облегчение умножения больших чисел в греческой письменной нумерации ввёл Аполлоний (между 250 и 200 гг. до н. э.). Он разбивает десятичные разряды на классы по четыре, перемножает пифмены (числа разрядных единиц) и определяет класс и разряд полученного произведения по разрядам перемножаемых пифменов. Приём этот совпадает с нашим, усложняясь лишь тем, что у греков отсутствовал позиционный принцип записи чисел.

В Индии в глубокой древности был создан способ умножения, близкий к современному. Перемножая отдельные разряды, начиная с высших, при большом развитии устного счёта и лёгкой «стираемости» подлежащей исправлению цифры, индийцы надписывали над множимым сразу произведение без промежуточных выкладок. Из Индии же ведут начало разные быстрые методы умножения чисел, равно как и способы облегчения умножения путём разложения перемножаемых чисел на множители.

Индийские способы умножения перешли к арабам с заменой стирания цифр вычёркиванием и надписанием исправленных. От арабов приёмы эти переходят в Европу, где к ним добавляются разные варианты, так что каждый учебник XV и XVI вв. предлагает от 6 до 8 разных способов умножения чисел. Наш нынешний способ умножения, начинающийся с низшего разряда множителя и образующий отступающие влево ряды цифр, встречается, начиная с Белдоманди (1410), у Пачоли (1494) среди разных других приемов; Региомонтан (1436—1476), Борги (1484) и Кардано (1539) ограничиваются уже только одним этим способом. Пачоли указывает на возможность умножения, начиная с высшего разряда множителя и отступая вправо, причём пустые места верхних частичных произведений он заполняет нулями. Этот способ применяют учебники коммерческой арифметики до XIX в. включительно, как способ, гарантирующий более аккуратную запись у учащихся.

Понимание того, что умножение есть частный случай сложения, ясно выражает Пётр Рамус в своей арифметике 1586 г.: «Умножение есть сложение, числа которого (слагаемые) не различаются между собой».

Латинский глагол multiplicare, от которого произведены разные другие термины, в том числе «мультипликацио» — умножение, употребляемое Магницким, является со всеми своими производными уже у Витрувия (около 15 г. н. э.). Все эти слова вошли в учебники всех европейских народов. Результат умножения назывался «суммой мультипликации», позднее numerus productus — произведённое число, откуда произошёл термин Product, обозначающий в западноевропейских языках произведение. Термин «множитель» имеется уже у Боэция (VI в.), «множимое» у Сакробоско (XIII в.).

В параграфе об умножении Магницкий впервые вводит названия компонентов действий. Он пишет:

«Подобает же знати, яко в умножении кийждо перечень свойственным нарицается именем: верхний убо перечень, его же умножаеши, нарицается еличество, а которым умножаеши, нарицается множитель. Третий же, от них производимый, именуется продукт или произведение, якоже сие:

$$\begin{array}{rl} 32 & \text{еличество} \\ 2 & \text{множитель} \\ \hline 68 & \text{продукт или произведение».} \end{array}$$

Следует особо отметить одно важное примечание Магницкого. Дав способ умножения, начинающийся с умножения на низший разряд множителя, Магницкий заявляет: «Нецыи же умножают странным иным некоим образом, сие есть: верхнего перечня от правыя руки числа умножают числами нижнего перечня от левыя руки; якоже зде умножено есть зри сице:

$$
\begin{array}{r}
481 \\
399 \\
\hline
1443 \\
4329 \\
4329 \\
\hline
191919
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1470 \\
481 \\
\hline
5880 \\
11760 \\
1470 \\
\hline
707070
\end{array}\text{»}
$$

Кого имеет в виду Магницкий, ссылаясь на «нецыи», сказать трудно. Возможно, что он пользовался книгой Пачоли, так как в своём стихотворном предисловии к «Арифметике» говорит, что черпал материал для неё и из «италийских» книг.

Этот «странный», по выражению Магницкого, способ имеет большие методические преимущества. При применении его не может случиться у ученика того обычного в школе затруднения, когда он, не рассчитав, сколько нужно места при умножении, начал действие на левом крае доски или листа тетради и вследствие этого не может написать произведения множимого на отдельные разряды множителя аккуратными столбиками.

При умножении приближённых чисел, в настоящее время приобретающем особенное значение в школьном преподавании, способ умножения, начинающийся с бо́льшего разряда множителя, должен всячески насаждаться в школе.

Для выполнения умножения многозначных чисел разными авторами указывались десятки правил. Излагать их нет смысла; достаточно указать из них только те, которые представляют тот или иной интерес или оставили какой-нибудь след в наших современных приёмах вычислений.

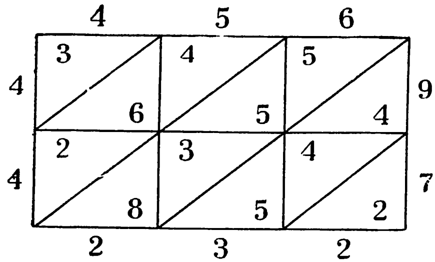
Описание многих из этих некогда применявшихся способов умножения дано в книге В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (Учпедгиз, 1940).

Немецкий автор Петценштейнер (XV в.) советует располагать умножение (456×97) следующим образом:

$$
\begin{array}{r|l}
456 & \\
\cline{1-1}
3192 & 7 \\
4104 & 9 \\
\cline{1-1}
44232 &
\end{array}
$$

Автор, очевидно, имеет в виду предупредить при умножении на многозначное число возможность пропуска умножения на какой-нибудь разряд множителя.

Очень распространённым в старину был способ умножения «решёткой», называвшийся в Италии Gelosia (джелозия, жалюзи — решётчатые ставни). Умножение чисел 456 и 97 по этому способу располагается так:



Множимое стоит над решёткой, множитель — справа, написанный сверху вниз. От умножения каждой цифры множимого на каждую цифру множителя получаются однозначные или двузначные числа; десятки этих чисел пишутся в соответственной клетке над наклонной чертой, единицы — под ней. Цифры произведения получают сложением чисел по наклонным полоскам решётки, как это ясно без объяснений по приложенному примеру.

На приёме умножения способом «решётки» основан прибор, называемый палочками Непера. Таблица умножения чисел от 1×1 до 9×9 размещена на 9 линеечках, как показано на рисунке 71. В клетках, разделённых наклонными линиями, в верхней части записаны десятки, в нижней — единицы табличного произведения. Левая линеечка с цифрами 0, 1, 2, ..., 9 неподвижна, остальные могут передвигаться и выниматься из рамы.

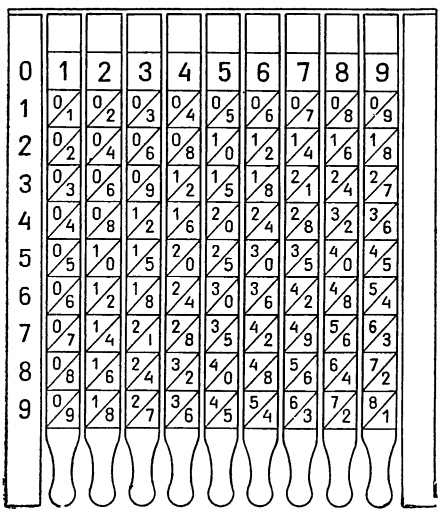
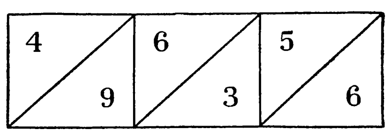


Рис. 71. Палочки Непера.

Пусть надо умножить 798 на 7. Расположим подвижные линейки в таком порядке, чтобы верхние числа их образовали множимое 798. Тогда на седьмой строке на подвижных линейках 7, 9 и 8 имеем:



Складывая по наклонным полоскам, имеем: 5 5 8 6.

И. Непер.

При умножении на многозначное число повторяется то же самое для каждого разряда множителя.

Непер описал свой прибор в 1617 г. После него прибор был усовершенствован.

Произведения отдельных пар цифр множимого и множителя разными авторами располагались весьма различными способами, например таким:

$$\begin{array}{r}
456\times 97 \\ \hline
36 \\
45 \\
54 \\
42 \\
35 \\
28 \\ \hline
44232
\end{array}$$

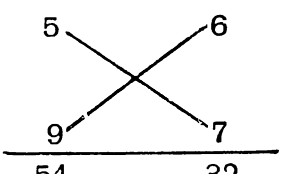
Можно расположить промежуточные произведения в виде треугольника или иной фигуры. Авторы руководств нередко методическим достоинством считали то, что поместили в своей книге большее число способов умножения.

Приводим страницу старейшей печатной арифметики (Тревизской, 1487). Здесь дано умножение чисел $56\,789\times 1234$ тремя способами:

1) способ Петценштейнера,
2) современный способ,
3) способ жалюзи.

В книге приведены ещё другие способы умножения. Интерес представляет способ умножения «крестиком» или хиазм, в простейшем виде возникший очень рано и развитый Лукою Пачоли в конце XV в. Это так называемый «способ-молния».

Умножение 56 на 97 писали так:



$6\times 7=42$, подписываем 2, удержим в памяти 4 десятка; при умножении десятки получаются перемножением цифр, соединённых наклонными чёрточками: $5 \times 7 = 35$, $6 \times 9 = 54$, $35+54+4 = 93$ десятка; подписываем под чертой 3 десятка, 9 удержим в памяти. Перемножение десятков даёт $5 \times 9 = 45$ сотен; прибавим 9 сотен, получим 54 сотни, которые и запишем впереди десятков произведения.

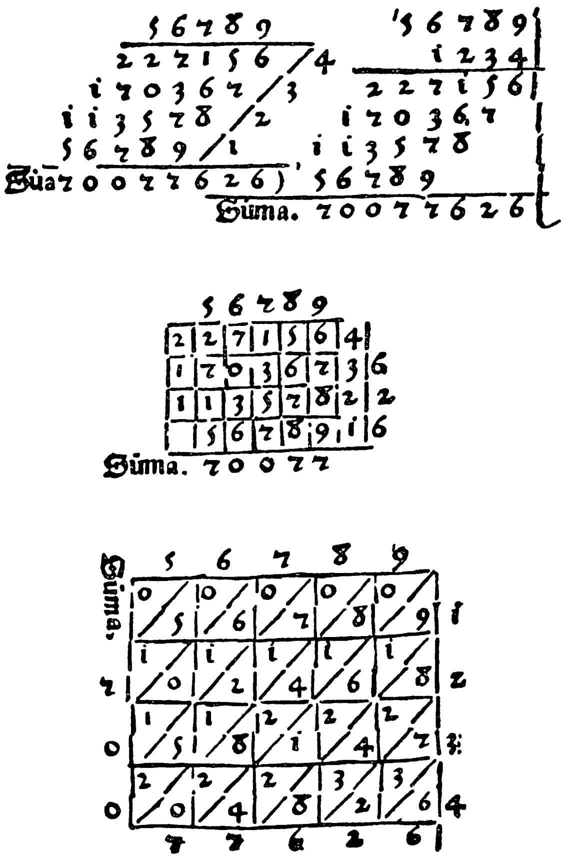


Рис. 72. Умножение числа 56 789 на 1234 в Тревизской арифметике.

Способ этот получил название хиазма, так как знак $\times$ напоминает греческую букву **хи**.

Для перемножения многозначных чисел можно дать соответственную схему. Пусть требуется перемножить два трёхзначных числа типа $(100a+10b+c)$ и $(100p+10q+r)$. Действие сводится к выполнению по отдельным звеньям его (рис. 73).

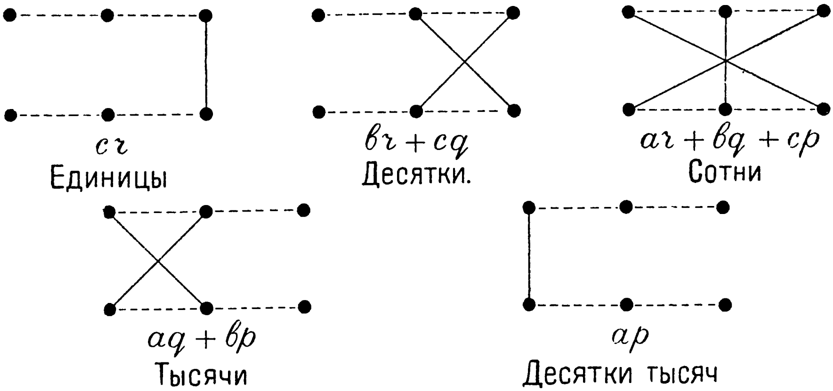


Рис. 73.

Если при выполнении отдельных звеньев получится двузначный или трёхзначный результат, то десятки его (их может быть и двузначное число) прибавляются к результату следующего звена. Отдельные звенья умножения можно соединить в одну схему (рис. 74). Пусть требуется произвести действие:

$$\times \begin{array}{r} 416 \\ 253 \\ \hline \end{array}$$

Поступаем по второй схеме в следующем порядке:

1) Перемножаем по направлению xxxxxxx: $6 \times 3 = 18$; подпишем под чертой 8 единиц, удержим в памяти 1 десяток.

2) Умножаем по — — — —: $1 \times 3 = 3$, $5 \times 6 = 30$, $3 + 30 + 1 = 34$ (десятка), подписываем 4 десятка, 3 сотни удержим в памяти.

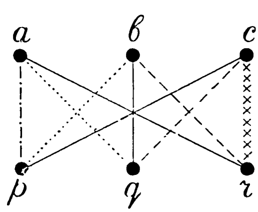


Рис. 74.

3) Умножаем по линиям $2 \times 6 = 12$, $1 \times 5 = 5$, $4 \times 3 = 12$ (сотен); $12 + 5 + 12 + 3 = 32$ (сотни); 2 сотни подпишем, 3 тысячи запоминаем.

4) Умножаем по ...: $4\times5=20$, $2\times1=2$; $20+2+3=25$ (тысяч); 5 тысяч подписываем, 2 десятка тысяч запоминаем.

5) Умножаем по —·—·—·—: $4\times2=8$, $8+2=10$ (десятков тысяч) и подписываем их.

Все промежуточные выкладки делаются в уме.

Тем же самым приёмом умножения является излагаемый в некоторых руководствах так называемый «способ Фурье», который иллюстрируется на следующем примере:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 9\,576 \\ 4\,213 \end{array} \\
\hline
40\,343\,688
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
3\cdot6=1\mathbf{8} \\
1+7\cdot3+6\cdot1=2\mathbf{8} \\
2+5\cdot3+7\cdot1+6\cdot2=3\mathbf{6} \\
3+9\cdot3+5\cdot1+7\cdot2+6\cdot4=7\mathbf{3} \\
7+9\cdot1+5\cdot2+7\cdot4=5\mathbf{4} \\
5+9\cdot2+5\cdot4=4\mathbf{3} \\
4+9\cdot4=\mathbf{40}
\end{array}
$$

Напечатанные жирным шрифтом цифры, если их написать, идя по столбцу снизу вверх, дают искомое произведение. Все эти выкладки делаются устно, и сразу выписываются цифры произведения.

Наш современный способ умножения стал единственным, применяемым на практике со времени широко распространённых учебников Адама Риза (XVI в.).

Деление

Ранние учебники арифметики (Максим Плануд, около 1340 г., Тревизская арифметика 1478 г.) называют деление нахождением числа, которое содержится в делимом столько раз, сколько делитель содержит единиц. Такое определение деления лежит в основе египетского способа, рассмотренного выше. Различие двух видов деления — деления на части и по содержанию — появляется у Рудольфа в его «Арифметике», 1526 г. Против такого различения двух видов деления не раз выступали русские методисты и педагоги, называя его «немецкой выдумкой» (Шохор-Троцкий, Синцов и др.).

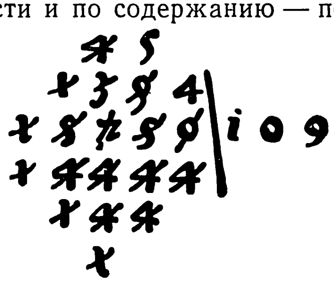


Рис. 75. Деление в Тревизской арифметике. При делении 15 750 на 144 получается 109 в частном и 54 в остатке.

Как производили деление чисел греки, мы не знаем, так как до нас дошёл только один пример деления шестидесятеричных дробей Теона Александрийского (IV в. н. э.). По этому примеру проф. М. Я. Выгодский («Арифметика и алгебра в древнем мире», 1941, стр. 214 и след.) реконструирует греческий способ деления, который очень несущественно отличается от нашего (некоторой громоздкостью промежуточных вычислений).

Индийский способ деления, удобный при их способе вычислений, в котором цифры легко «стирались» и исправлялись, превратился в весьма громоздкую операцию перечёркивания и надписывания цифр у арабов, которая под названием «деления вверх» держалась у европейских народов до XVIII в.

Иллюстрируем этот способ деления одним из простых примеров, взятых из «Арифметики» Магницкого,— 158 888 : 348.

Делитель подписывается под делимым. Так как 158 не делится на 348, то первую цифру делителя надо писать под второй цифрой делимого. В уме находим первую цифру частного и пишем за скобкой вправо от делимого:

$$\left.\begin{array}{l} 158888 \\ \ 348 \end{array}\right\} 4.$$

Умножаем отдельные разряды делителя на 4, вычёркиваем умноженную уже цифру, произведение отнимаем от соответствующих разрядов делимого, перечёркиваем их и надписываем остаток сверху: $4 \cdot 3 = 12$; $15-12=3$. Запись приобретает такую форму:

$$\begin{array}{l} \ 3 \\ 158888 \\ \ 348 \end{array} \Big\} \ 4.$$

Далее поступаем так же со следующими разрядами делителя:

$$4 \cdot 4 = 16; \quad 38 - 16 = 22;$$

$$\text{запись:} \quad \begin{array}{l} \ 2 \\ \ 32 \\ 158888 \\ \ 348 \end{array} \Big\} \ 4;$$

$$8 \cdot 4 = 32; \quad 228 - 32 = 196;$$

$$\text{запись:} \quad \begin{array}{l} \ 1 \\ \ 29 \\ \ 326 \\ 158888 \\ \ 348 \end{array} \Big\} \ 4.$$

Пока что выполнен первый этап деления:

$$\begin{array}{r|l} 158888 & \underline{\ 348\ } \\ \underline{1392} & 4 \\ 196 & \end{array}$$

Остаток 19 688 найден в виде неперечёркнутых цифр. Поступая таким же образом с числом 19 688, имеем:

$$\left.\begin{array}{r} 4 \\ 19688 \\ 348 \end{array}\right\} 5; \qquad \left.\begin{array}{r} 2 \\ 4 \\ 19688 \\ 348 \end{array}\right\} 5; \qquad \left.\begin{array}{r} 2 \\ 42 \\ 19688 \\ 348 \end{array}\right\} 5.$$

Выполнены два этапа деления:

$$\begin{array}{r|l} 158888 & \underline{\ 348\ } \\ \underline{1392} & 45 \\ 1968 & \\ \underline{1740} & \\ 2288 & \end{array}$$

С остатком 2288 поступаем так же:

$$\left.\begin{array}{r} 4 \\ 2288 \\ 348 \end{array}\right\} 6; \qquad \left.\begin{array}{r} 2 \\ 44 \\ 2288 \\ 348 \end{array}\right\} 6; \qquad \left.\begin{array}{r} 20 \\ 440 \\ 2288 \\ 348 \end{array}\right\} 6.$$

Выполнены три этапа деления:

$$\begin{array}{r|l} 158888 & \underline{\ 348\ } \\ \underline{1392} & 456 \\ 1968 & \\ \underline{1740} & \\ 2288 & \\ \underline{2088} & \\ 200 & \end{array}$$

Соединяя всё вместе и производя все три этапа вычислений на одной записи, имеем:

$$\left.\begin{array}{r} 22 \\ 144 \\ 2920 \\ 32640 \\ 158888 \\ 34888 \\ 348 \\ 4 \end{array}\right\} 456 \text{ и остаток } 200.$$

Под делимым в первой строке был написан делитель. После нахождения первой цифры частного все цифры делителя перечёркивались.

Для второго этапа деления делитель подписывался вновь, отступая на одно место вправо, но, по-видимому, для изящества или полноты последняя цифра делителя писалась за перечёркнутой последней цифрой первого делителя и таким же образом при последующих делениях.

Отметим, что Магницкий фиксацию получения остатка при делении представляет иначе: при частном 456 он пишет $\frac{200}{348}$. Это не дробь, о которой ещё нет у него речи, а запись того факта, что при делении 158 888 на 348 получилось частное 456 и остаток 200.

Если сравнительно простой случай деления потребовал такой сложной операции, в которой Магницкий делает ошибки в записи, то станет понятным факт, что умение делить считалось в старину признаком хорошего знания математики. В VII в. монах Бэда (прочтите прекрасную балладу Полонского «Бэда — проповедник»!) считался одним из самых просвещённых людей.

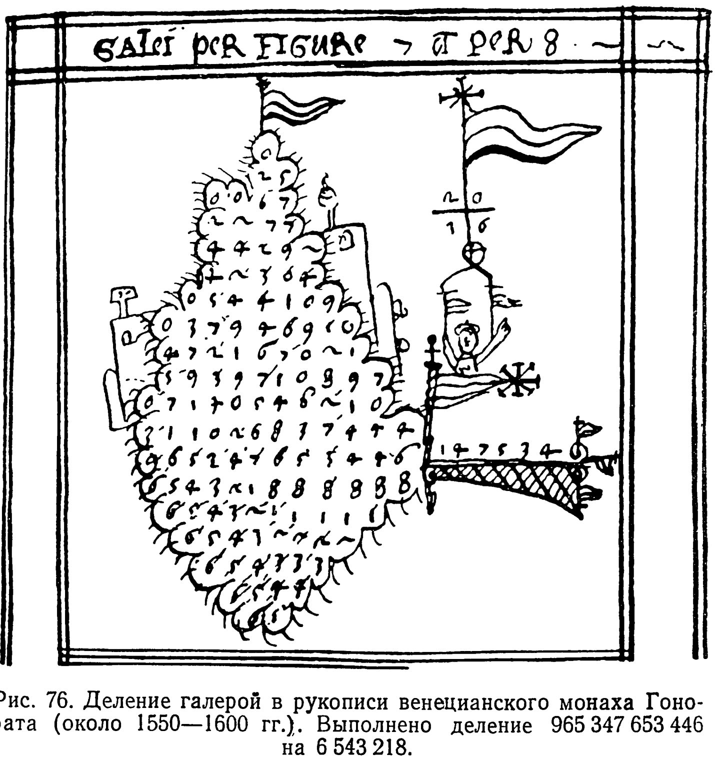


Рис. 76. Деление галерой в рукописи венецианского монаха Гонората (около 1550—1600 гг.). Выполнено деление 965 347 653 446 на 6 543 218.

Ему приписываются слова: «Кто умеет делить, тому никакое дело не покажется трудным».

Эту же мысль выражает Пётр Рамус ещё в 1555 г.: «Надо иметь хорошие руки и хороший глаз», — говорит новобранцам фехтмейстер (учитель фехтования). «Нужен хороший ум, хорошая память и хорошая рука для ежедневного упражнения в делении,— скажет здесь учитель ученику,— ибо большое разнообразие вычислений требует высокого ума, постоянного внимания и верной руки больше, чем где-либо. И никто не может считать себя поистине прилежно занимающимся математикой, если каждый день при занятиях арифметикой не делает делений над насколько возможно большими числами».

Это замечание станет понятным, если учесть, что рехенмейстер каждого торгового города в то время умножение и деление делал по своему способу, почти во всех случаях весьма громоздкому. Каждое вычисление сверх того сопровождалось рядом поверок, так что учебники арифметики достигали весьма внушительных размеров [54]. Например, арифметика Рамуса, по существу арифметика целых чисел, имеет 240 стр. большого формата, книга Тартальи — 555 стр. в четверть листа. Отсюда становятся понятными заявления авторов, аналогичные тому, какое делает Пиетро Борги в 1484 г. в предисловии к своей «Арифметике»:

«Здесь начинается знатный трактат об арифметике, в котором рассматриваются всякие предметы, относящиеся к торговле, составленный и изложенный Пиетром Борги из Венеции... (продолжение в стихах)... приобретает деньги и большие почести в отечестве и за границей и будет иметь возможность входить в сношения со всеми народами всяк с помощью изложенных здесь схем» [55].

Современный способ деления, в котором существенным является то, что частичные произведения делителя на отдельные разряды частного в готовом виде подписываются под делимым и отдельными остатками, появляется впервые в одном итальянском манускрипте 1460 г., лишь с той разницей от нашего способа, что остаток повторяется дважды: сначала вычитается частное произведение, а затем к остатку, написанному вновь, приписывается очередная цифра делимого. Совсем уже по-современному производят деление Каландри (1491) и Лука Пачоли. Уже в XVI в. встречается деление без записи промежуточных произведений, но некоторые авторы, например Кардано (1539), продолжали упорно делить по-старому; противник Кардано — Тарталья (1556), хотя и указывает на способ деления «вниз», сам же делит «вверх». Вольф (1713) приводит ещё оба способа деления, а Карстен (1767) повторяет при нахождении каждой цифры частного делитель. Вот пример его деления 78 934 на 278:

78934 : 278	
278	(делитель)
556	(278·2)
2333	(первый остаток с припиской цифры)
278	(делитель)
2224	(278·8)
1094	(второй остаток)
278	(делитель)
834	(278·3)
260	(третий остаток)

Последний учебник, который содержит деление только «вверх», вышел в 1800 г. Но этот учебник отличается значительными анахронизмами: в нём ещё нумерация и медиация (деление пополам) фигурируют в качестве особых арифмегических действий.

Из старых авторов обстоятельнее других останавливается на методике письменного выполнения деления Клавий (1583). Он даёт правила и указания для подбора цифр частного, определения возможных остатков, случаев появления нулей в частном и т. д. По образцу Рамуса (1569) Клавий советует предварительно заготовлять таблицу произведений делителя на 2, 3, 4, ... 9. Тарталья предпосылает делению устные упражнения и рассматривает разницу между делением на части и делением по содержанию.

Приписывание нулей к остатку по исчерпании всех цифр делимого, т. е. фактическое выражение частного в виде десятичной дроби с отделением вертикальной чёрточкой или иным знаком целой части частного от дробной, встречается до введения в употребление десятичных дробей. Обыкновенно это применялось при процентных вычислениях (делении на 100) и при извлечении квадратных корней. Такое предвосхищение десятичных дробей встречается уже у арабоязычных математиков.

Термина «деление» как названия отдельного арифметического действия не знает классический латинский язык. Употреблявшийся позднее всеми авторами, вплоть до Магницкого, термин divisio (от глагола dividere — делить, распределять) у Витрувия, Капеллы и Боэция означает вообще раздробление числа на части. Значение деления в нашем смысле слова термин divisio приобретает только у Герберта (940—1003), и одновременно появляются производные термины «делимое», «делитель». Результат деления долго назывался «сумма деления», латинский термин «частное» появляется в XIII в. — нечётко у Леонардо Пизанского, последовательно у Иордана Неморария.

Л. Магницкий в основном производит деление старым приёмом перечёркивания и надписывания цифр (деление «вверх»), но, пояснив этот способ на целом ряде примеров, даёт и «иной образец деления», который почти полностью совпадает с нашим современным способом. Вводит Магницкий и термины: делимый, делитель, частное. Вот один из его двух примеров «иного образца деления».

Ин образец деления
77446392 : 2864

Делимый	77446392	
Делитель	2864	
Вычитающий	**5728**	(2864×2)
Остаточный	20166	
Делитель	2864	
	20048	(2864×7)
	11839	(второй остаток)
Делитель	2864	
	11456	(2864×4)
	3832	(третий остаток)
Делитель	**2864**	
	968	

Результат деления:

$$77446392 \left\{ 27041 \quad \text{остаток} \ \frac{968}{2864} \right.$$

Как видно, Магницкий повторяет при нахождении каждой цифры частного подписывание делителя, что делали, как мы видели выше, ещё авторы конца XVIII в. (Карстен).

«Трудная вещь — деление», — говорит старинная итальянская поговорка. Усвоивший деление в старое время получал титул «доктора абака». Число существовавших разных способов деления доходило до нескольких десятков. На выполнение деления сравнительно небольших чисел требовалось много времени, подобно тому как чукче в повести Т. Сёмушкина для подсчёта 128 оленей потребовалось несколько часов.

Описывать существовавшие различные способы деления нет смысла. Все они говорят только о том, что деление, как и вся арифметика, трудно усваивалась человеком [56].

Сокращённые приближённые действия

С распространением десятичных дробей шло параллельно изобретение приёмов, которые позволяли бы производить сокращённо арифметические действия с возможной точностью результата. Сложение и вычитание таких чисел не представляло трудностей ввиду простоты оценки точности результата, умножение и деление потребовали специальных приёмов для этого.

Первые шаги в изобретении способа сокращённого умножения принадлежат швейцарцу Иосту Бюрги (1552—1632), инициативному новатору в области многих важных идей (десятичные дроби, логарифмы), но, несмотря на положительность научных данных, неудачнику в сохранении своего приоритета. Скромных часовых дел мастер, механик, вычислитель, он систематически опаздывал с публикацией своих идей. В сохранившейся только в рукописном виде его «Арифметике» 1582 г. находим пример умножения, почти не отличающийся от нашего способа приближённого умножения.

Бюрги

0	1	2	3	4		
1	2	3	5	8		
0	1	2	3	4		(01234×1)
	0	2	4	6	8	(01234×2)
		0	3	7	0	и т. д.
			0	6	1	
				0	9	
0	1	5	2	5		

Современный способ

0,	1	2	3	4
1,	2	3	5	8
	1	2	3	4
		2	4	7
			3	7
				6
				1
0,	1	5	2	5

Предвосхищает современные приёмы сокращённого деления талантливый вычислитель Лудольф ван-Цейлен (1596), известный по найденному им «Лудольфову числу» для выражения π. Ему нужно делить 22-значное число на 22-значное. Он заготовляет таблицу произведений делителя на числа 2, 3, 4,..., 9 и при выполнении деления отбрасывает при каждом вычитании частичных произведений по последней цифре. В другом случае он укорачивает и делимое. Так же поступал Джон Непер (1550—1617) в своём «Логистическом искусстве», которое писалось в те же годы, что и книга Цейлена, но осталось без влияния на современников, так как было издано только в 1839 г. Рукопись представляет интерес в том отношении, что позволяет бросить взгляд на способ производства тех колоссальных вычислений, которые были необходимы Неперу для составления первых таблиц логарифмов.

Преториус (Иоганн Рихтер), профессор математики в Альтдорфе и Виттенберге, в рукописи 1599 г. даёт обстоятельные правила для производства сокращённых умножений. О способе Преториуса с похвалой отзывался Кеплер (1571—1630), широко использовавший приём сокращённых вычислений и знавший правила оценки точности последней цифры результата.

К более широкому применению приёмов приближённых вычислений привели книги Аутрида (1631) и Валлиса (Уоллиса) (1685), распространившие эти приёмы и на извлечение корней. Методическая разработка вопроса начинается с М. Оома (1792—

1862) [1]. Его книга «Опыт строго последовательного изложения системы математики» (3 тома, 1822) представляет большой шаг вперёд в направлении к современному построению учебников математики. В ней впервые даются правила для определения места запятой в результате действий. Ф. Вольф (1828) [2] формулирует правила о перемещении запятой в противоположных направлениях в сомножителях до тех пор, пока во множителе перед запятой не окажется только одна значащая цифра, и даёт правило о числе цифр результата. Он же рассматривает зависимость количества десятичных знаков в компонентах и результате с назначенной наперёд точностью.

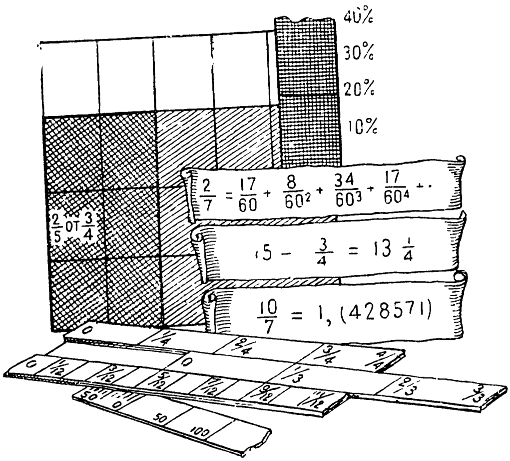
Введение метрической системы мер и весов заставило широко применять десятичные дроби и включать вопросы сокращённых действий во все школьные учебники математики. В советской методической литературе в этом вопросе руководящая роль принадлежит профессору В. М. Брадису. Строгую научную теорию приближённых вычислений создал академик А. Н. Крылов. Ранее неоднократно этим вопросам занимался профессор В. П. Ермаков.

---

[1] Профессор математики Берлинского университета, брат известного физика, член-корреспондент Петербургской Академии наук.

[2] Не нужно смешивать с Х. Вольфом.

ДРОБНОЕ ЧИСЛО



1. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ДРОБЕЙ И ИХ ВИДЫ

Необходимость в дробных числах возникла у человека на весьма ранней стадии развития. Уже делёж добычи, состоявшей из нескольких убитых животных, между участниками охоты, когда число животных оказывалось не кратным числу охотников, могло привести первобытного человека к понятию о дробном числе. Однако настоящая необходимость в этих числах возникла при измерении непрерывной (сплошной) величины при помощи выбранной единицы этой величины.

Конкретное происхождение дробей зафиксировано в нашем языке. Мы называем минутами, секундами, терциями, с одной стороны, 60-ю долю часа, минуты, секунды, с другой стороны — 60-е доли одного градуса угла и дуги окружности. Такое название одними и теми же словами мер совершенно различных величин (времени и угла) объясняется тем, что жители древнего Вавилона по меньшей мере за 3000 лет до н. э. имели систему мер, в которой меньшая единица измерения составляла $\frac{1}{60}$ часть высшей единицы. Если основную меру данной величины принять за единицу, то меньшие будут $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$ и так далее доли от основной меры. Так как для разных величин меры имели одни и те же единичные отношения, то естественно было от конкретных названий мер различных величин прийти к абстрактным понятиям дробей $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$ и т. д. и назвать их одними и теми же именами, независимо от того, к какой конкретной величине они относились.

Наши термины: минута, секунда, терция — перенесены из латинского языка. Римляне говорили:

minutia prima — первая доля — $\frac{1}{60}$,

minutia secunda — вторая доля — $\frac{1}{60^2}$,

minutia tertia — третья доля — $\frac{1}{60^3}$ и т. д.

Для сокращения речи первую долю стали называть просто: минута — minuta — доля, вторую долю — secunda — секунда (вторая), третью долю — терция — tertia — третья.

Такое же обращение конкретных мерных единиц в абстрактные дроби мы наблюдаем у римлян в других случаях. Слово «унция» у них было денежной и весовой единицами, составлявшими одну двенадцатую часть высшей единицы (асса — фунта). Позднее унцией стали называть отвлечённую дробь $\frac{1}{12}$ и говорили об унции часа и унции любой другой меры. У Ювенала (сатира 1) один получает «унцийку одну, другой одиннадцать унций наследства».

Таким образом, практика привела человека к необходимости использования разных единиц, а из отношений единиц этих конкретных мер возникло абстрактное понятие дроби.

Различают три типа дробей: 1) дроби единичные (аликвоты), или доли: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$; 2) дроби систематические, знаменателями которых являются не всякие числа, а только числа из некоторого определённого множества, например степени 10 или степени 60; 3) дроби общего вида, у которых и числители и знаменатели могут быть любыми целыми числами.

2. ЕДИНИЧНЫЕ ДРОБИ ИЛИ ДОЛИ

На самой ранней ступени развития человек пришёл к понятию единичных дробей. Доли (половину, четверть, осьмушку) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ употребляет и такой человек, который никогда не слышал слова «дробь», применяемого в смысле обозначения части, доли.

Египтяне, достигшие в технике и искусстве высокого уровня развития, в арифметике дробных чисел не пошли далее единичных дробей. Все дошедшие до нас египетские документы математического содержания периода от 2000 г. до н. э. и до VIII в. н. э. (от эпохи Московского папируса до Акминского) содержат только единичные дроби. Помимо их, лишь дробь $\frac{2}{3}$ применялась египтянами и имела особый знак. Были попытки ввести в счётный обиход дробь $\frac{3}{4}$.

Когда результаты какого-либо расчёта приводили к дроби неединичной, её заменяли суммой единичных дробей.

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}; \qquad \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104} \text{ и т. д.}$$

Папирус Ахмеса даёт таблицу всех дробей вида $\frac{2}{n}$ с числителем 2 и нечётными знаменателями от 5 до 99, представленных суммами единичных дробей. Очевидно, такие таблицы были раз навсегда заготовлены и ими пользовался каждый обучающийся математике. Папирус Райнда содержит, кроме названных, ещё 26 случаев представления неединичных дробей в виде суммы единичных.

Некоторые дополнительные представления дают другие папирусы [57].

Применением способа представления неединичных дробей единичными египетские авторы решают без особого труда отдельные задачи. В значительном числе случаев способы решения их весьма удобны.

Рассмотрим это на конкретном примере.

Нужно разделить 7 хлебов между 8 человеками поровну. На долю каждого приходится $\frac{7}{8}$, но такого числа для египтянина не существовало, зато он знал, что:

$$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Ему и надо каждому участнику выделить эти доли.

Если все 7 хлебов разрезать на восьмые доли и отсчитать каждому по 7, то потребуется для этого сделать $7\times7=49$ разрезов. Египтянин знал, что ему надо иметь 8 половинок, 8 четвертушек и 8 осьмушек, поэтому он режет 4 хлеба пополам, 2 хлеба на 4 части каждый и 1 хлеб на 8 частей. Ему нужно было сделать только $(4+6+7)$ 17 разрезов.

Египетские способы вычисления при помощи единичных дробей перешли уже в эпоху Пифагора (VI в. до н. э.) к грекам. До III в. (до н. э.) ими исключительно пользовались и греческие математики. С этой эпохи рядом с единичными дробями появляются другие виды дробей, но единичные дроби остались до конца греческой истории в практической жизни.

Шумеры в древнейшую эпоху пользовались также единичными дробями, но уже в III тысячелетии до нашей эры эти дроби стали вытесняться шестидесятеричными.

Арабы переняли единичные дроби, по-видимому, от греков, так как Герон и Диофант пользуются, если и не исключительно, ещё единичными дробями. И ал-Хорезми (IX в.) и ал-Кархи (XI в.) производят вычисления при помощи единичных дробей.

От арабов эти дроби перешли в первые европейские учебники, в частности в книгу Леонардо Пизанского (XIII в.), предпочитающего во многих случаях производить вычисления при помощи единичных дробей, хотя он хорошо знал и другие виды

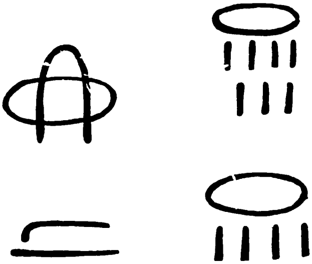


Рис. 77. Изображение дробей египтянами. В первом столбце изображены дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$, во втором $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{4}$.

дробей. Из этой книги единичные дроби попали во многие позднейшие учебники коммерческой арифметики всех европейских народов и держались там ещё долго.

Более подробные сведения о вычислениях при помощи дробей у египтян читатель может найти в статье Д. П. Цинзерлинга «Математика у древних египтян» («Математика в школе», 1939, № 2—3) и в упомянутой уже книге профессора О. Нейгебауэра «Лекции по истории античных математических наук» (т. I, 1937). Критические замечания о ней, в частности об истолковании автором египетской арифметики дробей, даёт проф. М. Я. Выгодский в статье «Тенденциозное освещение истории догреческой математики» (журн. «Техническая книга», 1938, № 1, стр. 45—47).

3. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Уже в III тысячелетии до нашей эры жители Вавилона ввели в употребление систематические дроби, знаменателями которых служили степени числа 60. Эти народы, как мы знаем, имели систему счисления с основанием 60. Они догадались эту же идею образования счётных единиц применить и от единицы в обратном направлении, рассматривать $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$ и т. д. как разряды чисел и писать их теми же знаками, которые употреблялись для письма целых чисел. О теориях, объясняющих выбор вавилонянами числа 60 за основание их системы счисления, было сказано нами ранее. Это число было выбрано очень удачно: результаты деления на числа, не содержащие других простых множителей, кроме 2, 3 и 5, выражались конечными шестидесятеричными дробями, что было крайне важно для практических вычислений [58].

Вавилоняне предвосхитили идею нашей метрической системы, десятичного деления монетных единиц и десятичных дробей. Единственным недостатком их системы было долгое отсутствие знака 0 и особого знака (нашей запятой) для отделения целой части числа от дробной. Знак для обозначения отсутствия какого-нибудь разряда, не последнего в числе, у вавилонян появился около 500 г. до н. э. Созданная ими система шестидесятеричных дробей была настолько удобна, что уже за 200 лет до н. э. была принята греческими астрономами, от последних перешла в европейскую науку и удовлетворяла её до конца XVI в. **Обыкновен-**

ные дроби к тому времени получили уже широкое распространение в практической жизни, называясь **народными**, в то время как шестидесятеричные носили название **физических** или **астрономических.**

Уступили шестидесятеричные дроби своё место лишь в XVII в. десятичным дробям, историю которых рассмотрим более подробно в особом разделе.

Кроме изученных двух основных видов систематических дробей — шестидесятеричных и десятичных, возможны разные другие виды их.

За основание системы таких дробей, как за основание системы счисления, можно взять любое натуральное число и представить всякую правильную дробь в виде:

$$O+\frac{b_1}{a}+\frac{b_2}{a^2}+\frac{b_3}{a^3}+\ldots$$

Изучением таких дробей занимались многие математики, в том числе Лагранж, а в особенности слепой французский математик Панжон (1782—1870).

В новое время изучались другие различного вида систематические дроби. Так, математик конца XIX в. Стефанос рассматривал дроби вида:

$$O+\frac{a_1}{1\cdot 2}+\frac{a_2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .n}+\ldots$$

Эти дроби нашли важное применение в математике. Вводились дроби, знаменателями которых являются только произведения простых чисел p_1, p_1p_2, $p_1p_2p_3$, ... и разные другие виды систематических дробей.

Подробнее о вавилонских шестидесятеричных дробях читатель прочтёт в уже указанной книге проф. О. Нейгебауэра и в статьях проф. М. Я. Выгодского «Математика древних вавилонян», «Успехи математических наук» (вып. VII и VIII, 1940 и 1941). Изучению этих работ полезно предпослать чтение статьи проф. С. Я. Лурье «Вавилонская математика» («Математическое просвещение», вып. II, 1937) [58].

4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ ОБЩЕГО ВИДА

Греческие математики, как мы видели, пользовались для вычислений единичными и шестидесятеричными дробями; и история наших обыкновенных дробей получает своё начало в Греции. Рациональную дробь вида $\frac{p}{q}$ греки, правда, называют не числом, а отношением, однако греческие математики рассмотрением таких отношений положили начало теории и практике наших обыкновенных дробей.

Архимед (287—212) определяет длину окружности словами так: она равна 3 целым диаметрам и кусочку, который находится (по величине) между одной седьмой и десятью семьдесят первыми $\left(3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}\right)$. Эратосфен (276—194) пишет: часть меридиана между тропиками содержит 11 таких частей, каких весь меридиан содержит 83 (вместо того чтобы сказать, что этот отрезок меридиана составляет $\frac{11}{83}$ всего меридиана). Птолемей (II в. н. э.), вычисляя длину хорды, говорит, что в ней содержится почти 84 такие части, каких диаметр содержит 120 $\left(\text{вместо } \frac{84}{120}\right.$ $\left.\text{диаметра}\right)$.

Римляне не развили дальше понятия обыкновенных дробей. Как указано выше, их основная дробь была унция $\left(\frac{1}{12}\right)$. Дроби $\frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \ldots$ они называли «7, 8, 9, ... унций» и производили над такими «дробями» действия, как это изображено у Горация:

«Скажи мне, Альбина сын, что останется, когда ты от 5 унций отнимешь одну унцию?...» (Ученик соображает)...

«Давно мог бы ты это сказать!»

Наше недоумение, что мешало ученику сразу ответить: «четыре унции» разъясняется ответом ученика: «Одна треть». Ученик выполнял вычисления:

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Учитель продолжает: «Правильно. Ты будешь хорошо управлять своим имуществом. А если прибавить одну унцию, что получится тогда?»

Ответ: «Половина».

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что римляне называли дроби их прежними конкретными названиями. Отсюда происходят некоторые своеобразные названия их дробей. 12 унций (12 двенадцатых) составляли 1 асс (фунт); $\frac{11}{12}$ называлось deunx (от de uncia — «асс без унции»); $\frac{10}{12}$ — dextans (de sextans — «асс без $\frac{1}{6}$») и т. д.

Развитием идеи обыкновенной дроби мы обязаны Индии. Индийцы также употребляли вначале единичные дроби, но очень рано они начинают пользоваться обыкновенными дробями общего вида. Уже в древнейших их памятниках, создание которых относится к IV в. до н. э. («Сульвасутра» — книги о построении алтарей у Апастамбы), встречаются дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$ и т. п. Впрочем, нужно и здесь отметить, что некоторые исследователи (Кей) выражают сомнение относительно древности этих памятников.

Симон Стевин.

Брамагупта (род. в 598 г. н. э.) учит правилам действий над дробями почти в наших терминах: «Произведение дробей есть произведение числителей, разделённое на произведение знаменателей», и т. д.

Обыкновенные дроби индийцев наряду с египетскими единичными и вавилонскими шестидесятеричными перешли к арабам, однако даже ал-Хорезми (820) в своём учебнике индийской арифметики лишь мимоходом упоминает об индийских дробях. В одном сочинении Абу-ал-Вафа встречается дробь вида $\frac{m}{n}$, где $n>m>1$. Автор заявляет, что дроби такого вида некрасивы и их следует избегать. Деловые люди не любят таких дробей и предпочитают их выражать (точно или приблизительно) суммой единичных дробей (долей). Насави (1030) и европейские переводчики труда ал-Хорезми (XII в.) на латинский язык восполнили этот раздел. Отсюда начало учения об обыкновенных дробях стало просачиваться в европейские учебники, но совершался этот процесс очень медленно. Ясное изложение обыкновенных дробей появилось только в учебнике Симона Стевина (1585).

Стевин писал свою «Арифметику» для образованных людей. В элементарные учебники и в народные массы дроби проникали очень медленно. Трудность их усвоения хорошо понимал Стевин и на этом основывал свою агитацию за десятичные дроби.

Ещё в 1735 г. в предисловии к XVI изданию английской «Арифметики» Уингейта читаем, что в этом издании «изложение арифметики целых чисел, необходимой для денежных расчётов, для торговли и других приложений, даётся раньше, чем открывается доступ к крутым, трудным путям дробей, при одном виде которых некоторые учащиеся приходят в такое уныние, что останавливаются и восклицают: ради бога, не дальше».

у немцев фраза «in die Brüche geraten» — «попал в дроби» — равносильна «попал в переделку».

Изложение дробей появляется в учебниках европейских школ только в XVIII в. У ранее упомянутого Вольфа впервые появляется требование о том, что свойства действий, установленные для целых чисел, должны обосновываться для дробей. В Англии учение о дробях и арифметика вообще входили в программу коммерческих школ; в средних же общеобразовательных школах для знати, вроде Итонской, существующей с 1446 г., арифметика стала обязательным предметом преподавания только в 1851 г. [59].

С этим фактом поучительно сопоставить слова М. В. Ломоносова, написанные за 100 лет до этого в объяснительной записке к программе шляхетского кадетского корпуса — аналогичного Итонской школе учебного заведения для русского «благородного юношества»: «А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит» [1].

5. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Десятичные дроби представляют вид систематических дробей, которые в настоящее время получили особое значение в связи с принятой почти всем миром метрической системой мер и весов, соответствующей употребляемой десятичной системе счисления.

Предшественницей десятичных дробей является система шестидесятеричных дробей вавилонян, также в некоторой степени соответствовавшая системе мер и весов этого народа.

Удобства шестидесятеричных дробей для вычисления были признаны, как мы видели, уже греческими учёными. На заре нового времени возникает понимание того, что удобство этих дробей есть следствие не столько свойств числа 60, сколько систематичности этих дробей. Зреет мысль о том, что в основу системы таких дробей может быть положено и другое число. За такое число при употреблении десятичной системы счисления для натуральных чисел должно быть взято число 10. Понимание этой мысли можно видеть уже в учебнике арифметики середины XII в., приписываемом Иоанну Севильскому. Иордан Неморарий (XIII в.) даёт даже специальное название таким систематическим дробям, аналогичным шестидесятеричным.

Анонимный «Алгоризм о минуциях (долях)» XIV в. ясно указывает, что число 60 является основой системы дробей лишь потому, что имеет много делителей, что за основу системы можно было бы взять и другие числа, например 12 или 10. В последу-

---

[1] Эти слова М. В. Ломоносова взяты из одного дела архива бывшего Главного управления военно-учебных заведений.

ющие века появлялись мнения, что основой системы дробей должно быть число 10.

Очень рано появляются частичные предвосхищения отдельных свойств десятичных дробей и действий над ними. Многие старые авторы, от ал-Хорезми до Иордана Неморария, при извлечении квадратного корня и деления пользуются свойствами десятичных дробей. Так, вместо $\sqrt{26}$ берется $\sqrt{260000}$; полученный корень 509 делится на 100 и частное обращается в шестидесятеричную дробь 5°5′24″, или в конкретном обозначении:

$$5+\frac{5}{60}+\frac{24}{3600}.$$

В рукописи XV в. находим значение корня из 392 в виде

$$19\ \frac{7989}{10\,000}.$$

Для вычисления длины отрезка в долях радиуса Пурбах (1413—1461) берёт радиус за 600 000 и выражает приближённые значения длин целыми числами. Региомонтан в 1467 г. принимает радиус равным 100 000, указывая, что это основание (десятичное вместо шестидесятеричного) упрощает выкладки. Виет (1579) делает шаг дальше: длину отрезка в 5 радиусов и 73 652 стотысячных его он изображает как **5** 736 52 позднее 5/736 52, а это равносильно нашему 5,736 52. Преимущество десятичной системы дробей перед шестидесятеричной при десятичной системе счисления Виет понимает и подчёркивает.

Отделение дробной части числа от целой части чёрточкой встречается уже у Региомонтана, а Франческо Пеллос (Пеллицати) в своей «Арифметике» 1492 г. употребляет впервые для отделения точку.

Ряд других авторов пользовался теми же и другими свойствами десятичных дробей: Кардано (1539) находит частное от деления числа на 10, 100, 1000 отбрасыванием последних цифр делимого, называя этот прием «правилом Региомонтана», а Аппиан (1527) пишет, что $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$; $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$; $\frac{1}{8}=\frac{125}{1000}$; $\frac{1}{16}=\frac{625}{10\,000}$, с той же целью, с которой современный учитель подчёркивает эти равенства на первых уроках, посвящённых десятичным дробям.

Все эти и многие другие отдельные использования разными авторами свойств десятичных дробей были оторванными друг от друга и не представляли даже намёка на последовательное изложение свойств новых систематических дробей.

Попытку систематического развития идеи десятичных дробей в Европе сделал в середине XIV в. Э. Бонфис в Тарасконе

(Южная Франция). Он оставил рукопись, которая лишь после 600-летнего хранения в архиве была прочитана в наши дни. В рукописи Бонфиса оказалось изложение идеи десятичных дробей и показательного счисления с основанием 10. Разряды десятичных дробей Бонфис называет «первые», «вторые» и т. д., по примеру терминологии шестидесятеричных дробей. Работа Бонфиса представляет, по-видимому, лишь первоначальный краткий эскиз о десятичных дробях. Автор понимал идею этих дробей значительно глубже [60].

С несравненно большей, можно сказать, с исчерпывающей полнотой теория десятичных дробей была изложена самаркандским астрономом Джемшидом Гиясэддином **ал-Каши** в первой половине XV г. Работы ал-Каши «Ключ к арифметике», законченный в марте 1427 г., и «Трактат об окружности», написанный несколько ранее, переведены на русский язык.

В первой главе второй книги «Ключ к арифметике» ал-Каши пишет: «Астрономы применяют дроби, последовательными знаменателями которых являются число 60 и его степени; они называют их (доли) минутами, секундами, терциями, квартами и т. д. Мы ввели, по аналогии с правилом астрономов, дроби, в которых последовательными знаменателями являются число десять и его степени. Мы называем степени (доли) десятыми, десятичными секундами, десятичными терциями, десятичными квартами и т. д.».

В дальнейших главах ал-Каши подробно излагает правила действий над десятичными дробями. Для отделения дробной части в десятичной дроби ал Каши употребляет различные приёмы: 1) пользуется чернилами различного цвета, 2) отделяет целую часть от дробной вертикальной чертой, 3) заключает ту и другую части числа в отдельные прямоугольники, 4) надписывает над каждой цифрой название разряда и т. д. Очень ясно чувствуется отсутствие употребления запятой. В четвёртой книге, посвящённой измерению различных фигур, многие результаты, данные в шестидесятеричных дробях, переводятся в десятичные и этому преобразованию уделяется много внимания.

В разделе VIII «Трактата об окружности» ал-Каши находит для отношения длины окружности к диаметру (числа π) в виде десятичной дроби 17 правильных цифр:

$$\pi \approx 3,\ 141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 2.$$

Для запоминания этого числа ал-Каши даёт арабские и персидские стихи. Отметим, что голландский математик Лудольф ван-Цейлен 200 лет позднее после вычислений, занявших всю его жизнь, получил для числа π 34 (или 32) цифры.

Огромной важности работы Джемшида Гиясэддина ал-Каши остались неизвестными и неоценёнными до нашего времени. О них лишь упоминает американский историк математики

Д. Е. Смит в своей «Истории математики» (т. II, стр. 238—240) и на русском языке Н. Юсупов («Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке», Казань, 1933 г., и в «Трудах II Всесоюзного математического съезда», т. II, стр. 456—460). В 1948 г. немецкий математик П. Лукей (умер в 1949 г.) опубликовал с комментариями часть работ ал-Каши («Mathematische Annalen», т. 120). После смерти автора вышла его книга об арифметике ал-Каши (Висбаден, 1950). Доступными работы ал-Каши стали после издания перевода их и комментариев к ним в 1956 г. [61].

6. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ В ЕВРОПЕ

Работы Бонфиса и ал-Каши остались неизвестными в Европе. Здесь десятичные дроби были открыты независимо от названных авторов и вошли в широкое употребление до знакомства с работами первооткрывателей их. Открытие и популяризация десятичных дробей в Европе — огромная заслуга перед наукой фламандского инженера Симона Стевина (1548—1620), обычно признаваемого изобретателем десятичных дробей.

Выше мы видели, что отдельные идеи из области десятичных дробей существовали в Европе до Стевина. Стевин объединил эти идеи и создал систематическое учение, выступив восторженным и остроумным популяризатором десятичных дробей. В 1585 г. он публикует на фламандском и французском языках брошюру на тему «De Thiende, La Disme», в которой одновременно предлагает введение десятичной системы денежных единиц, мер, весов и десятичного деления углов и дуг, как естественное завершение идеи десятичных дробей. Приведём первые страницы этой брошюры, имевшей большое значение в развитии практической арифметики у европейских народов. Известный современный историк науки Жорж Сартон (1884—1956), фламандец, пишет в работе о Стевине, что он, Сартон, может уловить соль остроумия фламандца, только следя за выражением его глаз. Русский перевод тем более несовершенно передаёт оригинал. Это — «неполный, слабый перевод, с живой картины список бледный».

Для перевода термина Стевина «De Thiende, La Disme» употребим термин русских математических рукописей и Магницкого — «Децималь»: десятичное счисление. Вот как начинается брошюра Стевина:

«Децималь», учащая легко производить целыми числами, без ломаных, все расчёты, встречающиеся в людских делах, первоначально написанная на фламандском языке и теперь переведённая на французский Симоном Стевином из Брюгге.

Астрологам (астрономам), землемерам, меряльщикам обоев, проверщикам ёмкости бочек, стереометрам вообще, монетным мастерам и всему купечеству — Симон Стевин привет!

Иной, видя малость этой книжицы в сравнении с величием вас, мои достопочтенные синьоры, которым она посвящается, сочтёт, быть может, нашу смелость за нахальство. Это в том случае, если рассматривать пропорцию — малость книжки относится к (малому) несовершенству ума достопочтенных синьоров так, как великая польза от неё (брошюры) относится к высокой гениальности вас, мои синьоры, и если в этой пропорции читатель сравнивает малость книги и величие достопочтенных синьоров. Но в таком случае он, читатель, взял отношение первого члена пропорции к четвёртому, чего не допускает никакое правило о пропорциях. Если уж сравнивать тут что, то третий член с четвёртым! (т. е. величие пользы от книги и величие гениальности, «достопочтенных синьоров».— *И. Д.*).

Что собственно представляет собой предлагаемое? Какое-нибудь изумительное, неожиданное открытие? Ничего подобного, а, наоборот, такую простую вещь, которая не заслуживает называться открытием. Может же недалёкий умом деревенский медведь по счастливой случайности набресть на дорогой клад, не применив при этом никакой учёности! Такой именно случай имеет место здесь. Если же кто-нибудь вздумал бы обвинить меня в хвастовстве своим умом при выяснении полезности предлагаемого, то он докажет этим лишь то, что у него не хватает здравого смысла и умения различать вещи простые от гениальных, или то, что он недооценивает стремления к росту общего благополучия.

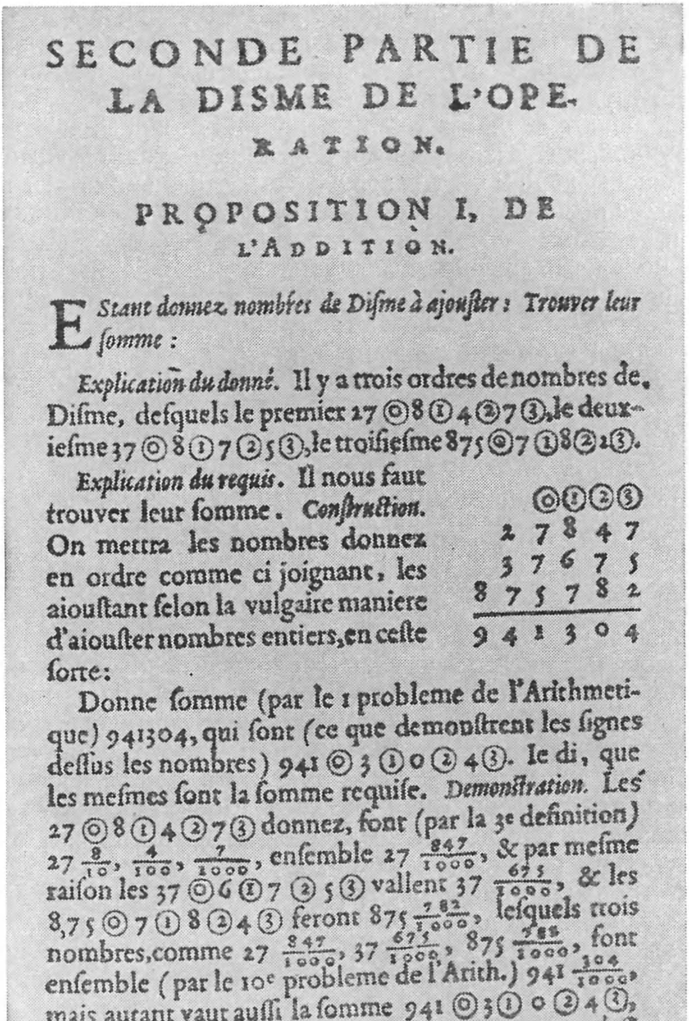
Как бы там ни было, нельзя пренебречь полезностью предлагаемого для бесцельного опорочивания предлагающего. Ибо подобно тому, как моряк, случайно открывший неведомый дотоле остров, смело объявляет принадлежащими своей родине все его богатства, и ему это не сочтётся за самохвальство, так же и мы говорим здесь смело о великой пользе этого изобретения,— я говорю о великой, так как она более велика, чем, как я полагаю, кто-либо из вас ожидает, и это я заявляю без какого бы то ни было желания прославлять себя.

Предметом этой Децимали является число, а польза применения чисел вам, мои синьоры, так хорошо знакома из ваших повседневных занятий, что было бы неуместно тратить слова на пояснение этого. Если кто из вас астроном, то он знает, что мир благодаря астрономическим расчётам стал раем, изобилующим всем тем, что земля производит не повсеместно...[1] Но подобно тому, как сладкое не бывает без горького, так трудность необходимых для этого (астрономических для мореплавания) вычи-

---

[1] Эта оценка астрономии созвучна словам М. М. Хераскова («Плоды наук», 1761):

Когда через моря стремятся корабли,
На камни бы они или на мель текли,
Когда б через свою великую науку
Нам астрономия не подавала руку.



SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster: Trouver leur somme:

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte:

	⓪	①	②	③
2	7	8	4	7
3	7	6	7	5
8 7	5	7	8	2
9 4	1	3	0	4

Donne somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) $27\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, ensemble $27\frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent $37\frac{675}{1000}$, & les 8,75 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront $875\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) $941\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③, c'est

Рис. 78. Страница «Децимали» Симона Стевина.

слений, проистекающая из шестидесятеричной системы градусов, минут, секунд, терций и т. д., не остаётся при этом неотведанной. Если же синьор является землемером, то он убеждён в великом благодеянии, извлекаемом миром из его науки, благодаря которой избегаются многочисленные недоразумения и распри, возникающие ежедневно из-за незнания границ земель.

Но в это же время синьор хорошо знает (особенно тот, кто занимается крупными делами этого рода) докучливость всех умножений, которых требуют эти аршины и дюймы, умножений, не только трудных, но и являющихся причиной ошибок, приводящих к большим потерям той или другой стороны, и это даже в тех случаях, когда измерения и другие подготовительные работы выполнены хорошо, не говоря о том, что ошибки эти подрывают доброе имя землемера. То же относится к монетчикам, торговцам и каждому в его деле.

Чем большего внимания заслуживает избежание этих трудностей и чем труднее пути к этому, тем большим является значение предлагаемой здесь Децимали, устраняющей все эти препятствия. Каким же образом она этого достигает?

Она учит — чтобы сказать это одним словом — выполнять легко, без ломаных, все расчёты, встречающиеся в людских делах, так как это делается в четырёх действиях арифметики...

Достигается ли таким образом сбережение драгоценного времени, спасается ли при этом то, что при иных способах теряется, изживаются ли трудности, распри, ошибки, потери и прочие случайности, обычные спутники расчётов,— обо всём этом я охотно предоставляю судить вам.

Если же кто скажет, что многие изобретения кажутся хорошими на первый взгляд, но при попытках применения их не дают результатов, и, как это всегда случалось с искателями вечного движения, что то, что казалось хорошим при малых пробах, в больших, т. е. в действительности, не стоило ломаного гроша, то тому мы отвечаем: здесь не может быть такого сомнения, так как... многие опытные голландские землемеры, которым мы объяснили наш способ, пользовались им к великому своему удовлетворению, бросив всё то, что каждый из них сам изобрёл для облегчения своих вычислений, а такой результат обеспечивает нашему изобретению будущность».

В брошюре, на двадцати страницах малого формата, пронизанных агитацией в духе приведённого выше предисловия, Стевин доказывает, как производить вычисления «без ломаных».

Дроби 0,3752 и 8,937 он пишет:

3 ① 7 ② 5 ③ 2 ④, 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③

или 0,54 через 54 ②

Когда десятичные дроби пишутся одна под другой, Стевин применяет более разумный способ письма:

		①	②	③	④
2	3	7	5	7	5
−	5	9	7	3	9
1	7	7	8	3	6

Иост Бюрги.

Иоганнес Кеплер.

но всё же не догадывается писать проще. Особенно громоздкой оказывается запись умножения, например 0,000378×0,54:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 4 & 5 & 6 & \\
 & & 3 & 7 & 8 & \\
 & & & 5 & 4 & 2 \\
\cline{2-5}
 & 1 & 5 & 1 & 2 & \\
1 & 8 & 9 & 0 & & \\
\hline
2 & 0 & 4 & 1 & 2 & \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 &
\end{array}
$$

Одновременно со Стевином к идее десятичных дробей пришёл уже знакомый нам самоучка Иост Бюрги, идею которого воспринял Кеплер, изображавший в своих таблицах десятичные дроби уже проще; например, 0,567 представляется у него в виде 0/567.

Запятую для отделения целой части числа от дробной ввёл Непир в 1617 г.; он же предложил для этой цели точку, хотя её употреблял уже Клавий в 1593 г. Позднее систематически точкой стал пользоваться Райт (1618) в английском издании Непира.

Так как в самом начале XVII в. появились логарифмы и вследствие назревшей потребности в них получили сразу же широкое распространение, то столь же быстро распространились десятичные дроби, без которых были немыслимы логарифмические вычисления. Трактаты об арифметике с начала XVII в. уже содержат главу о десятичных дробях (Аутрид, Кавальери, Меций, Уингейт и др.). Такэ (1656) указывает, что десятичные дроби делают действия над обыкновенными дробями лишними. Но существование во всех странах систем мер и весов, не имевших десятичной основы, заставляло в арифметике тренировать учащихся в действиях над обыкновенными дробями. Некоторые начальные руководства, например Вольфа (1710), совсем обходят десятичные дроби. В «Арифметике» Магницкого (1703) им отводится лишь всего 3 страницы. Для Магницкого «Иной чин арифметики, яже Децималь или десятная» есть только способ вычисления для геометрических задач и извлечений корней. «Различные действия чрез сей чин может и сам тщатель удобно творити»,— заявляет автор. Очевидно, что в России в то время десятичные дроби были ещё мало известной новинкой, и Магницкий не считает нужным познакомить с ними читателей, которые в большинстве не знакомы с десятичными дробями.

7. ТЕОРИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Периодические десятичные дроби появляются в научных трактатах с XVII, в учебниках — с XIX в.

Арабский математик XV в. ал-Марадини впервые отмечает факт, что при делении 47°50′ на 1°25′ частное (в шестидесятеричных дробях) является периодическим с 8 повторяющимися цифрами [62].

История периодических десятичных дробей в науке содержит громадное число фактов, голый перечень которых занимает в «Истории теории чисел» профессора Диксона 21 страницу убористого текста. В этом обзоре фигурируют многие известные математические имена — Лейбница, Валлиса (Уоллиса), Ламберта, Эйлера, Бернулли, Гаусса и др.

В нашем обзоре коснёмся только тех элементарных свойств периодических дробей, которые входят в курс школьной арифметики.

Примеры простейших случаев обращения обыкновенной дроби в десятичную и обратно были уже у Апиана (1527). Излагает теорию вопроса впервые Кавальери (1643), не рассматривая периодичности.

Большой трактат по алгебре Валлиса, изданный в 1676 г., содержит ряд предложений о периодических дробях. Валлис, утверждающий, что не имеет предшественников в этой области, знает, от обращения каких обыкновенных дробей получается периодическая чистая или смешанная дробь, сколько цифр содержит период, как превратить периодическую дробь в обыкновенную. Знает Валлис и тот факт, что при извлечении корня квадратного из неполного квадрата или корня кубического из неполного куба никогда не получается периодическая дробь, но он не касается ещё вопроса о природе полученной при извлечении корня непериодической бесконечной десятичной дроби (иррационального числа).

Лейбниц (1677), а особенно Ламберт (1728—1777) и Эйлер (1707—1783) изучают многие свойства периодических дробей, устанавливая связь этих свойств с теорией чисел. Робертсон (1768) впервые отмечает, что $0{,}999... = 1$. Гаусс (1801) устанавливает связь периодических дробей с учением о степенных вычетах и первообразных корнях. Он же приводит периоды для дробей $\frac{1}{p}$ для многих простых чисел p. Наибольшее число цифр в периоде для таких дробей может быть $p-1$ и это имеет место при знаменателях до 100 для чисел 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.

Таким образом, $\frac{1}{7}$ [0, (142857)] имеет 6 цифр в периоде, $\frac{1}{97}$ имеет 96 цифр. Многие авторы, помимо Гаусса (Бернулли, Шенкс), составляли таблицы периодов десятичных дробей.

Школьное правило обращения чистых и смешанных периодических дробей в обыкновенные излагается впервые в руководстве Августа (1822). Термины «чистая» и «смешанная» периодическая дробь имеются впервые в руководстве Коппе (1836).

8. К ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Дробь можно определить двояко: как некоторое число долей единицы или как часть числа. Обе эти точки зрения можно уловить уже у египтян. Первого взгляда придерживается Евклид («Начала», кн. VII, предложения 3 и 4), второй взгляд на дробь появляется с XII в. в руководствах арифметики при рассматривании деления одного числа на другое, когда деление не заканчивается без остатка (абакист Оддо, XII в.; Иордан Неморарий, XIII в.; учебник Рамуса, XVI в.).

На всех языках дробь называется ломаным числом. Этот термин ведет своё начало от арабов и через Леонардо Пизанского вошёл в европейские руководства. Названия «числитель» и «знаменатель» дроби имеются уже у Максима Плануда в конце XIII в. Термин «обыкновенная», или «вульгарная», дробь появляется у Траншана (1558) для обозначения дроби $\frac{p}{q}$, в отличие от шестидесятеричных (астрономических или физических) дробей. У венгра Сегнера, почётного члена Петербургской Академии наук, появляются термины «правильные» и «неправильные» дроби (1747). До того времени эти понятия отсутствовали.

Расширение дроби (умножение числителя и знаменателя на одно и то же число) и сокращение её встречаются с XII в., но первый термин входит в употребление лишь в XIX в., второй уже в XV в. Приведение дробей к общему знаменателю встречается с XII в., наш термин встречается у Региомонтана (1464).

Для нахождения общего знаменателя Ризе и Грамматеус (XVI в.) предлагают умножать меньший знаменатель на 2, 3, 5 и т. д., пока не получится число, делящееся на другой знаменатель, при этом только Стифель и Клавий (XVI в.) формулируют предложение, что величина дроби не меняется от умножения числителя и знаменателя её на одно и то же число.

Индийские математики (Брамагупта, VII в., Махавира, IX в.) умножают дроби по нашему правилу. Леонардо Пизанский рекомендует, перемножив числители, делить произведение сначала на один знаменатель и полученное частное на другой знаменатель. Иордан Неморарий даёт индийское правило деления произведения числителей на произведение знаменателей. В ранних руководствах по арифметике умножение дробей рассматривается после сложения и вычитания; Лука Пачоли (1494) начинает с умножения дробей. Уменьшение числа от умножения его на правильную дробь в печатном учебнике впервые рассматривает Пиетро Борги (1484). Самый факт представлял большие трудности для понимания, которые выразились в целом ряде попыток объяснения его, часто весьма хитроумных (Пачоли, Рудольф, Тарталья, Клавий). Что умножение дробей нельзя обосновать на понятии умножения целых чисел, а требует нового определения, ясно понимал Ньютон.

Что деление дроби на целое число сводится к умножению знаменателя дроби на это число, знали уже египтяне. Герон, пользующийся вообще египетскими приёмами вычислений в своей прикладной арифметике, неоднократно формулирует это правило деления дроби на целое число. Авторы XIII в. (Иордан Неморарий) для деления дроби на дробь делят числитель и знаменатель делимого на числитель и знаменатель делителя соответственно:

$$\frac{12}{35} : \frac{4}{5} = \frac{12:4}{35:5} = \frac{3}{7}.$$

Такое деление выполняется редко над данными числами, и эти авторы приходят к приему, показанному в нашей символике:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} : \frac{c}{d} = \frac{acd:c}{bcd:d} = \frac{ad}{bc}.$$

Что деление дроби на дробь сводится к «перекрёстному» умножению числителей и знаменателей, отмечает уже Бамбергская арифметика 1482 г. и многие позднейшие учебники, но до XVI в. учебники арифметики содержат правила, что при делении дробей нужно делимое и делитель сначала привести к общему знаменателю, после чего действие сводится к делению числителей. Только Стифель (1544) и потом Клавий (1585) формулируют чётко индийское (Брамагупта, VII в.) правило деления дробей, состоящее в том, что для деления дроби на дробь нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю. Термин «обратная» (reziprok, recus-procus — взад-вперёд) дробь встречается уже у Видмана (1489).

Логическая трудность, возникающая при делении дробей и заключающаяся в том, что при делении на правильную дробь получается число, большее делимого, привлекает к себе менее внимания, чем аналогичная трудность при умножении дробей. Тарталья (1556) разъясняет её, указывая, что в делении идёт речь о том, сколько раз делитель содержится в делимом.

Сложение дробей почти всегда ограничивается только двумя компонентами, что упрощает приведение их к общему знаменателю. Этот термин в учебниках появляется только в XVIII в.; до этого говорится только о соответственном расширении дробей. Бхаскара (XII в.) рассматривает в качестве общего знаменателя произведение знаменателей данных дробей, не обращая внимания на общие делители их. Более экономно в Индии поступает Махавира (IX в.). Леонардо (1228) указывает, что общий множитель двух знаменателей нужно брать в общем знаменателе только один раз, и употребляет для наименьшего знаменателя даже специальный, не привившийся, искусственный термин (columpna). Мысль Леонардо в течение нескольких веков осталась неиспользованной, и только Тарталья (1556) и Клавий (1583) воспользовались ею. Они выдвинули требование находить при сложении и вычитании дробей **наименьший** общий знаменатель. Для этого знаменатель первой дроби умножается на 2, 3, 5 и т. д., пока не получится кратное второго знаменателя, которое таким же образом комбинируется с третьим знаменателем, и т. д. Только в конце XVII в. (1696) появляется впервые наше правило нахождения общего знаменателя.

Жирар (1629) даёт схему сложения дробей, применявшуюся в течение всего XVIII в.: находится общий знаменатель, записывается вверху и выписываются рядом со слагаемыми дробями их новые числители:

$$\begin{array}{c|c} & 144 \\ \hline \frac{5}{6} & 120 \\ \frac{7}{9} & 112 \\ \frac{11}{16} & 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{331}{144} = 2\frac{43}{144}$$

По такой схеме знакомился впервые со сложением дробей в начальной школе автор настоящей книги ещё в конце XIX в. по старому эстонскому учебнику арифметики.

Египтяне, как мы видели, пользовались только единичными дробями. Это обстоятельство упрощало вопрос о записи их. В иероглифическом письме дробь $\frac{1}{n}$ обозначалась овалом (раскрытый рот), под которым ставили знак, изображающий знаменатель. В иератическом письме овал выродился в точку, и дроби изображались знаком знаменателя с точкой над ним. Этот способ записи дробей перешёл и к грекам, перенявшим египетские единичные дроби: греки писали единичные дроби так же, только в виде знака знаменателя со штрихом справа и выше строки. Но при употреблении дробей общего вида, у которых числитель больше единицы, этот способ записи стал неприменим.

Архимед в приведённом уже случае записывает дробь «десять семьдесят первых» в тексте словами, но в конце доказательства более сжато: числитель сохраняет словесную форму, а знаменатель записан ионийскими цифрами, снабжёнными штрихом: десять 71″.

Смешанное число $4\frac{8}{13}$ у Герона записывается следующим образом: «единиц 4, долей 13′13′ (тринадцатых) восемь». Знаменатель повторяется два раза для того, чтобы его значение читалось во множественном числе.

Египтяне и греки употребляли дроби, у которых числителем служило смешанное число.

Индийские авторы изображают дроби, в том числе и единичные, двумя числами: знаменатель под числителем, но без чёрточки между ними. Для изображения смешанного числа писалось сначала целое число, под ним числитель и под последним знаменатель. Арабы приняли тот же способ изображения дробей, причём ал-Насави (XI в.) настолько последователен в способе письма, что в случае правильной дроби пишет над числителем 0 (целых). Другие арабские авторы писали в смешанном числе целое рядом с дробью, но после дроби, как это делает и Леонардо Пизанский. У ал-Хассара (XII в.?) появляется дробная черта, которая переходит в первые европейские руководства (Леонардо Пизанский, Иордан Неморарий), но ещё в XV в. встречаются записи дробей в форме письма рядом числителя и знаменателя со штрихом наверху. Целое число перед дробной частью стали писать в Европе уже в XV в., а с XVI в. письмо дробей полностью принимает современный вид.

Обычный способ письма $\frac{a}{b}$ вызывает возражения со стороны типографий, как требующий трёхэтажного набора. Попыткой устранить это затруднение было введение косой черты /, которая называется солидом. Солид (solidus) в эпоху римской империи было название золотой монеты. Знак / есть выродившаяся буква S, которой обозначали денежный солид, подобно тому как английский фунт (денежный) обозначается буквой L (от слова Libra — фунт) и пенни обозначается буквой d (от denarius — динарий). Де Морган (1845) предлагал дробь всегда писать в виде a/b. Это предложение было встречено сочувственно математиками Стоксом и Кейли. Последний писал Стоксу (1880): «Нахожу, что солид является весьма хорошим знаком... Вы имеете все основания претендовать на пост президента общества защиты типографских работников от жестокого обращения». Глейшер (1873) отмечает, что знак / имеет преимущество перед знаком :, так как для писания последнего нужны два движения руки. Знак / принял Пеано в своём «Репертории математики». Часто применяемый способ изображения дробей с горизонтальной чертой, но мелким шрифтом, чтобы выиграть лишнюю строку в печати, вызывал всегда возражения, так как трудность различать при таком способе печатания, например, дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{8}$ очевидна.

9. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Книга VII «Начал» Евклида даёт метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел последовательным делением (алгорифм Евклида), идея которого исходит от пифагорейской школы. Чисто арифметическим путём этот метод приводит к цепной дроби, но нет данных, что Евклид понимал этот путь; он впервые появляется у Бхаскары.

Обращение корня $\sqrt{2}$ в цепную дробь даёт:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \; \ldots\ldots -$$

и подходящие дроби $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$

Эти значения известны Теону Смирнскому (II в. н. э.). Уже у Платона (429—348) имеется приближённое равенство $\sqrt{2} \approx \approx \frac{7}{5}$, а у Герона (I или II в. н. э.), кроме того, соотношение

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}.$$

Греки знали известное и вавилонянам приближённое равенство:

$$\sqrt{a^2+в} \approx a+\frac{в}{2a},$$

в которое Герон внёс дальнейшие уточнения. Загадочным является появление у Архимеда числа $\frac{1351}{780}$, являющегося 12-й подходящей дробью

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}.$$

Приближённое извлечение квадратного корня по способу Герона известно арабам, Пачоли (1494) и др. Катальди (1613) впервые записывает цепную дробь в современной форме и знает, что значения подходящих дробей приближаются к истинной величине корня, нечётные — возрастая, чётные— убывая. Швентер (XVI—XVII вв.), ссылаясь на «логистов и учителей счёта», ставит задачу о нахождении возможно простых и притом возможно близких значений дроби $1\frac{77}{233}$ и применяет современный способ обращения этой дроби в цепную и нахождения её подходящих дробей. Он знает уже наш способ составления подходящей дроби по двум предшествующим (для цепных с числителями единица). Броункер и Валлис в XVII в. изучают цепные дроби общего вида: первый даёт разложение.

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}};$$

а второй — правило составления подходящих дробей общего вида, когда числители отдельных звеньев не равны единице. У Валлиса появляется впервые термин «непрерывные дроби».

Элементарную теорию цепных дробей закончил Гюйгенс (1629—1695), которому эти дроби были нужны для определения возможно простых, но достаточно близких к требуемым отношений чисел зубьев для колёс механизма. Он сверх сведений, имевшихся у его предшественников, знает, что подходящие дроби есть дроби несократимые, что пары числителей, как и пары знаменателей смежных подходящих дробей, есть числа взаимно простые. Он знает теорему Лагранжа, согласно которой нет обыкновенной дроби со знаменателем, меньшим знаменателя подходящей дроби, которая была бы по величине ближе к данной дроби, чем подходящая дробь.

Очень много мемуаров посвятил теории цепных дробей Эйлер в «Комментариях» Петербургской Академии наук, начиная с 1737 г., не зная о работах Гюйгенса[1]. Его результаты, с частью которых можно познакомиться по книге Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых», значительно выходят за пределы элементарной математики. Эйлер впервые доказывает, что всякая рациональная дробь обращается в конечную цепную дробь, всякое иррациональное число — в бесконечную. Лагранж (1736—1813) систематически применял цепные дроби к решению неопределённых уравнений и для приближённого вычисления корней уравнений высших степеней. Он доказывает теорему, утверждающую, что иррациональный корень всякого квадратного уравнения общего вида может быть представлен чистой периодической цепной дробью. Школьное изложение цепных дробей дал впервые Груנерт (1832). Термин «цепная дробь» появляется в конце XVIII в.

Особым видом восходящих цепных дробей, образуемых алгорифмом, похожим на алгорифм цепных дробей, широко пользовался Ламберт (1728—1777). Они сходятся быстрее нисходящих цепных дробей:

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 48} + \frac{1}{5\cdot 48\cdot 1103} = \cfrac{4 + \cfrac{1 + \cfrac{1}{1103}}{48}}{5}$$

Нисходящая цепная дробь для $\frac{887}{1103}$ имеет, как легко проверить, 7 дробных звеньев. Третье приближение восходящей дроби равно седьмой подходящей дроби нисходящей.

Такими восходящими цепными дробями занимались Лагранж и Г. Кантор (1869); впервые они встречаются у арабов, от которых их перенял Леонардо Пизанский [63].

10. ПРОЦЕНТ И ПРОМИЛЬ

Процент и промиль являются названиями дробей $\frac{1}{100}$ и $\frac{1}{1000}$. В разных практических расчётах эти дроби получили широкое применение в качестве некоторых единиц, подобно унции у римлян в смысле $\frac{1}{12}$ от любой величины.

---

[1] См. «Историко-математические исследования», т. X, 1957.

В нашей дореволюционной школе и в школах буржуазных стран процентные вычисления изучались почти исключительно в связи с финансовыми операциями. Они составляют основной предмет так называемой коммерческой арифметики. В соединении с разными другими расчётами человеческого общежития (страхование, вексельные операции, вопросы статистики) они образуют дисциплину, которую в буржуазных странах называют политической арифметикой. Этот термин впервые встречается в начале XIV в. (Рабдас).

Так как процентные вычисления, хотя они в нашей школе и имеют другое назначение, возникли из финансовых операций, то остановимся в нескольких словах на истории их. Этот экскурс в историю финансовых операций к тому же разъяснит происхождение некоторых общеупотребительных терминов.

Отдача денег в долг и взимание за это некоторой части их заимодавцем практиковались во все эпохи прошлого. Уплачивавшаяся заимодавцу часть одолженного капитала обыкновенно определялась в сотых долях капитала. Сотая доля капитала и получила название процента.

Процентные операции широко практиковались в Вавилоне, о чём свидетельствуют дошедшие до нас таблицы процентов. Законодательство разных народов стремилось установить верхнюю границу допустимой процентной таксы. Банк Делосского храма (V и IV вв. до н. э.) устанавливает норму в 10%, которая снижается до 6—8% с сумм, выдаваемых при обеспечении недвижимостями, и повышается до 20—$33^1/_3$% с займов на торговые предприятия, связанные с морскими перевозками. Во II в. нормальная процентная такса снижается до 7—8%. В 347 г. до н. э. в Риме нормальная процентная такса была определена в 5%, а в 341 г. до н. э. вовсе запрещено было брать проценты. Это запрещение оставалось только на бумаге. В I в. до н. э. является нормальной таксой 4—6%, но и тогда она доходила иногда до 12%. Эта такса и была постановлением римского сената в 50 г. до н. э. признана максимально допустимой [64]. Христианская церковь на словах осуждала отдачу капитала под проценты, но всё же допускала «умеренный» процент в пользу заимодавца.

Как производились процентные вычисления у греков, остаётся неизвестным. Термин «капитал» происходит от латинского caput — голова, глава: это та сумма, которая заносилась в книги во главе расчётов. Соответственного смысла термин был и у арабов и от них перешёл вместе с процентными вычислениями в книгу Леонардо Пизанского (XIII в.), где слово capitale фигурирует впервые в современном смысле и переходит во все европейские руководства арифметики.

В период XIII—XVI вв. все учебники уделяют процентным вычислениям очень большое место, так как торговые круги составляли очень большую часть потребителей этих учебников (Лука Пачоли является одновременно усовершенствователем двойной бухгалтерии). С другой стороны, арабские учебники арифметики и алгебры, которые служили источниками и образцами для европейских авторов, были заполнены задачами на расчёты имущества по весьма сложному мусульманскому наследственному праву. Уже во времена Луки Пачоли (1494) имелись в употреблении процентные таблицы, составлявшие секрет отдельных предприятий. Первые печатные процентные таблицы издал Симон Стевин (1584) и включил их в свою «Арифметику» (1585).

Формула: $J = \frac{kpt}{100}$, где J — процентные деньги (интерес), k — капитал, p — процентная такса, t — время, имеется уже в руководстве 1732 г.; в школьном учебнике впервые она появляется в 1821 г.

Термин «интерес» от латинской фразы id quod inter est — то, что между (одолженным капиталом и полученным обратно),— впервые появляется в Англии в 1545 г. Слово **«процент»** происходит от латинских слов pro centum — со ста, на сто, которые в Италии получили форму pro cento. Эти слова писались и в форме per cento или, сокращённо, pcento и, наконец, procent.

Знак % возник в итальянских рукописях XV в.

Порядковые и разделительные числительные писались там обычно так: 1°—первое, во-первых, 2°—второе, во-вторых, и т. д. Per cento стали сокращённо писать: per 100, p 100, p. c. °, откуда и образовалось р $\frac{\circ}{\circ}$ и, наконец, $\frac{\circ}{\circ}$. В печатных книгах сначала избегали этого символа, употребляя per или pro C, наконец, р $\frac{\circ}{\circ}$, а с 1799 г. появляется почти всюду знак $\frac{\circ}{\circ}$. С двумя нулями числа 100, вопреки объяснениям некоторых авторов, символ $\frac{\circ}{\circ}$ не имеет ничего общего.

Понятие «промиль» (тысячная доля) впервые встречается у Кардано (1539), термин — в 1727 г. Сначала по аналогии с р $\frac{\circ}{\circ}$ употреблялся символ р$\frac{\circ\circ}{\circ\circ}$, потом (1836) $\frac{\circ}{\circ\circ}$. Косая чёрточка в символах $\frac{\circ}{\circ}$ и $\frac{\circ}{\circ\circ}$ появляется с середины XIX в. из типографских соображений.

Задач на проценты почти нет у Магницкого. Лишь в нескольких задачах упоминается о том, что «на 2 рубля за 8 лет взял росту 4 гривны» или «на 100 рублёв притяжал в 12 месяцев 5 рублёв». Объясняется это тем, что векселя в частном обиходе купцов были разрешены только в 1729 г. при Петре II. Торговые сделки купечество до этого совершало срочными уплатами, в которые входили и насчитываемые на капитал проценты.

Раздел о «кумпанствах» и срочных уплатах у Магницкого разработан весьма подробно. В западноевропейских странах банки существовали с XIII в. (Италия), и с этого времени обращаются и векселя, что вызвало к жизни правило учёта векселей и определения сроков уплаты, в выработке которых участвовали Лука Пачоли (XV в.), Тарталья (XV в.) и даже Лейбниц. В самом авторитетном научном журнале этого времени «Acta Eruditorum» Лейбниц привёл в 1683 г. доказательство неправильности применявшегося благодаря авторитету юриста Карпцова (1595—1666) так называемого коммерческого учёта при определении процентов в пользу заимодавца со ста рублей валюты векселя. Но юристы, не понявши рассуждений Лейбница, толковали его мнение и после этого неправильно, продолжая применять так называемый коммерческий учёт векселей.

11. ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРИИ ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ

Как указано выше, X. Вольф (1710) в своём руководстве впервые высказывает требование, что законы арифметических действий, установленные при обращении с целыми числами, должны обосновываться вновь для дробей. Методы этого обоснования были разработаны только в XIX в. Основным из них является метод, опирающийся на так называемый «принцип постоянства формальных законов», дополненный позднее «методом пар». «Принцип постоянства формальных законов» в современном его виде сформулирован профессором Кембриджского университета Пикоком (1791—1853), вернее тем «Аналитическим обществом» (математики Удхауз, Беббедж, Джон Гершель, Уэвелль и Эйри), душу которого составлял Пикок. Суть этого принципа в применении к дробям заключается в следующем.

В арифметике целых чисел рассматриваются отношения $a:b$; в случаях, когда число a кратно b, для таких отношений устанавливаются основные определения понятий равенства, неравенства, больше, меньше, суммы, произведения. Эти определения переносятся и на такие случаи отношений $a:b$, когда число a не является кратным b. Если при этом для отношения $a:b$ сохраняются в силе законы арифметических действий (сочетательность. переместительность и т. д.), то символ $a:b$ можно считать числом, которое называется дробью. Процесс введения, таким образом, новых чисел в дополнение к имевшимся до этого целым числам называется **расширением числовой области.**

Образец ведения дробных чисел таким путём для школы читатель найдёт в учебнике академика Д. А. Граве «Начала алгебры» (1915) и в некоторых других.

Ирландский математик Уильям Гамильтон (1805—1865) и за ним другие авторы ту же идею расширения числовой области применяют в более абстрактной форме в виде теории пар.

Если какая-нибудь операция над двумя числами стала невозможной в области имеющихся чисел, вводится новый символ в виде пары прежних чисел (a, b) и для такой пары устанавливаются определения равенства и некоторые другие. Если можно установить арифметические действия над новыми символами, подчиняющиеся законам действий над прежними числами, новые символы признаются числами. Гамильтон применил свою идею пар для обоснования теории комплексных чисел, но она с таким же успехом используется для введения дробных и отрицательных чисел.

Дмитрий Александрович Граве.

Образцы применения метода пар читатель найдёт в ряде руководств (Граве, Начала алгебры, Васильев, Введение в анализ, Виноградов, Повторительный курс алгебры, Комаров, Теоретические основы арифметики и алгебры, Белоновский, Основы теоретической арифметики, и др.).

Пикок изложил печатно свой принцип постоянства формальных законов впервые в 1833 г., Гамильтон — теорию пар в применении к комплексным числам без понятий в том же, 1833 г.

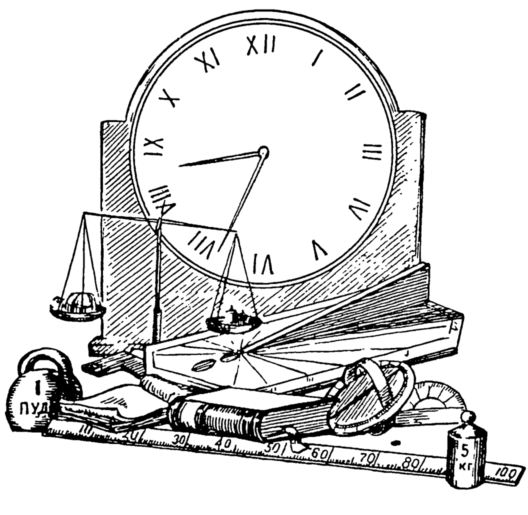
Сама идея перенесения имеющихся в математике законов на новые объекты и идея расширения области их применения весьма стара. Таким путём Орем в XIV в., Шюке в XV в. и Стифель в XVI в. вводили понятия отрицательных и дробных показателей, а Кардано и Бомбелли в XVI в.—мнимые числа. Заслугой Пикока и Гамильтона является подведение логического фундамента под эту операцию. Математик-философ Журден (1879—1919) говорит по этому поводу:

«Математики целые столетия пользовались «отрицательными» и «положительными» числами, отождествляли последние с какими-то числами без знака, не сомневаясь в законности этого, подобно тому, как они пользовались дробными и иррациональными «числами». И когда люди с логическим направлением ума возражали против этих неправильных утверждений, математики просто игнорировали их или говорили: «Продолжайте, а веру обретёте» (слова Даламбера юноше, который жаловался на то, что не понимает того, что он делает в математике). И математики были правы, но не могли дать правильных обоснований тому, что они делали, — по крайней мере доводы, которые приводились ими, были всегда неправильны... Не находилось философа-истолкователя, и, таким образом, почти вся интереснейшая часть математики оставалась в темноте до этого времени, когда во второй половине XIX в. математики сами начали развивать философию или скорее логику» (Ф. Журден, Природа математики, 1923, стр. 59).

Пикок и Гамильтон, а за ними ряд других математиков были такими математиками-философами, которые первыми стали создавать логический фундамент основ арифметики.

Возможность арифметического обоснования теории разных видов чисел указывал М. Оом (1822). Последовательно проводили идеи Пикока и Гамильтона в арифметике Ганкель («Теория комплексных числовых систем», 1867, русский перевод, Казань, 1912), Гейне (1872), Дини, Кутюра и др. Теорию пар к дробным числам применил впервые Ж. Таннери (1894) (русский перевод его руководства: «Курс теоретической и практической арифметики», 1913).

ИМЕНОВАННЫЕ ЧИСЛА



1. СИСТЕМА МЕР

Первым счётным прибором человека были пальцы рук и ног. Те же пальцы руки и ноги дали человеку первые меры длины. При глазомерной съёмке участка или местности расстояние определяется в шагах. Эта мера оказывается довольно постоянной, если шаги делаются без мысли о том, что они преследуют специфическую цель измерения расстояния. Поэтому рекомендуется при таком определении занять внимание чем-либо, например распевать песенку, а счёт шагов производить особым счётным прибором — педометром.

Для измерения полей шаг является слишком малой мерой и недостаточно постоянной, поэтому была введена в употребление мера **трость, или двойной шаг,** далее — **двойная трость,** или **перша.** В Англии «трость пахаря» как единица длины при измерении полей неоднократно уточнялась в писаном или неписаном законе.

Всё же такая мера оставалась весьма неопределённой. В сравнительно недалёком прошлом в английской практике мера **«хорошая палка пахаря»** колебалась в длине от 12 до $16^1/_2$ футов. В морской практике мера трость получила название **шток.**

Для измерения больших расстояний шаг оказался неудобной мерой. В Риме входит в употребление **миля**, равная тысяче двойных шагов. Отсюда понятно и название этой меры, происходящее от корня mille, milia — тысяча. Ещё большие расстояния измерялись переходами (за определённые промежутки времени), привалами, днями передвижения. В повести Т. Сёмушкина чукча указывает расстояние словами «три пота». В Сибири была в употреблении мера расстояния **бука** — расстояние, на котором человек перестаёт видеть раздельно рога быка. Автор книги в детстве слышал у эстонских моряков выражение: расстояние между пристанями десять **трубок** (трубкой называлось расстояние, которое при нормальной погоде судно проходит за время, пока курится набитая табаком трубка). В Испании такой же мерой расстояния служит **сигара**, в Японии **лошадиный башмак** — путь, проходимый лошадью, пока износится привязываемая к её ногам соломенная подошва, заменяющая подкову. У многих народов мерой расстояния была **стрела** — дальность полёта стрелы. Наши выражения «на ружейный выстрел», позднее «на пушечный выстрел» напоминают о подобных единицах расстояний.

Но не только величина измеряемой длины оказывала влияние на выбор меры. Размеры ткани или верёвки было неудобно мерить шагами. Уже у египтян, а затем и у других древних народов появляется мера **локоть** — расстояние от конца пальцев до локтя. Измеряемая ткань удобно наматывалась на такой эталон длины; полный оборот ткани около него составлял двойной локоть. Обхват ствола дерева удобно было мерить растянутыми руками: появляется мера — **сажень**, расстояние между кончиками пальцев вытянутых в противоположных направлениях рук.

Для измерений меньших расстояний или требующих большей точности употреблялась **ладонь** — ширина кисти руки. Английский крестьянин и любитель лошадей определяет до сих пор высоту лошади обязательно в ладонях. Древняя книга — талмуд определяет: «То, что имеет три ладони в окружности, имеет одну ладонь ширины». Это значит, что во время составления этой книги считали, что длина окружности в 3 раза больше диаметра её.

Для измерения небольших длин употреблялась длина сустава большого пальца — **дюйм** (слово это происходит от голландского duim — сустав пальца); употреблялась в качестве единицы длины и ширина пальцев. Величина дюйма определилась окончательно в Англии, где в 1324 г. королём Эдвардом II был определён законный дюйм, как длина «трёх ячменных зёрен, вынутых из средней части колоса и приставленных одно к другому своими концами». В английском быту до сих пор употребляется мера «ячменное зерно», равная одной трети дюйма.

Тем же королём Эдвардом был одновременно узаконен **фут** (по-английски foot — ступня ноги), как средняя длина ступни ноги человека. В XVI в. была установлена длина **трости,** или **штока,** как «длина ступеней 16 человек, выходящих от заутрени в воскресенье». По-видимому, имелось в виду при обмере ступней случайно взятых людей получить возможно точно среднюю длину ступни. В XVI в. математик Клавий определяет **«геометрический фут»** как ширину 64 ячменных зёрен. Это определение длины фута было более точным: сама ширина зерна более определённа, чем длина, а большое число зёрен, укладываемых рядом, выравнивает отклонения ширины отдельных зёрен от средней величины её.

Основная мера длины англо-американских народов **ярд** была узаконена королём Генрихом I (1101) и равнялась расстоя-

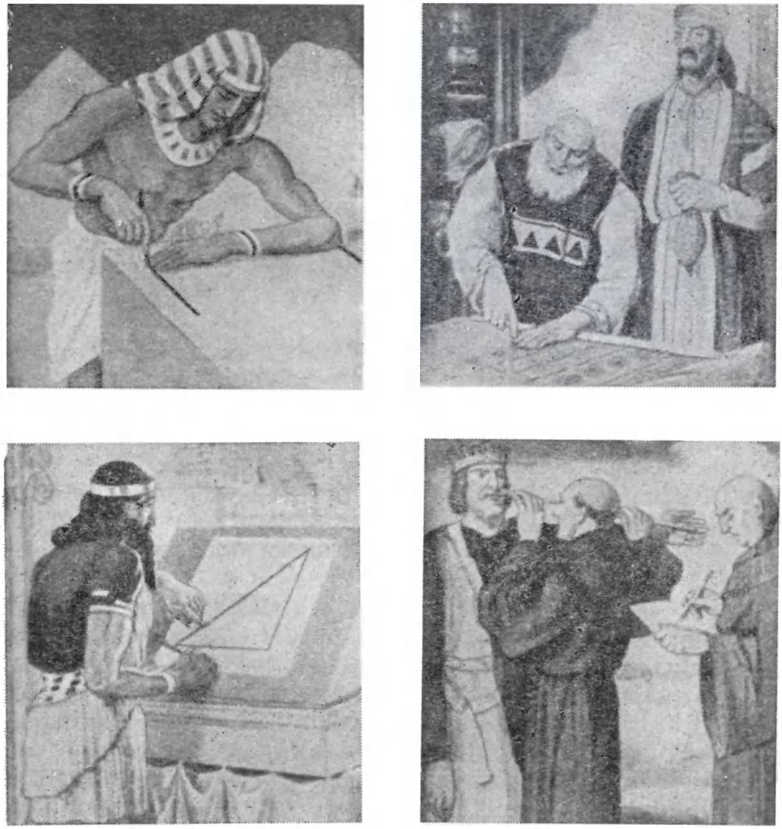


Рис. 79. Происхождение мер длины:

1) локоть (Египет); 2) пядь (Иудея); 3) ширина пальца (Вавилон); 4) ярд по приказу короля Генриха I.

нию от кончика его носа до конца среднего пальца вытянутой руки. Длина ярда в настоящее время равна 0,9144 *м*.

После долгой эволюции в Англии установилась система мер длины, которая через коммерческие связи вошла в частичное или полное употребление во многих странах. Основные единицы этой системы:

дюйм = 12 линиям,

фут = 12 дюймам,

английская сажень = 6 футам = 2 ярдам,

кабельтов = 100 саженям (в Америке 120 саженям, или 720 футам).

В английском флоте и на морских картах кабельтов равен $101\frac{1}{3}$ сажени = 607,56 фута = 182,87 *м*; законная миля в Англии и Америке равна 1760 ярдам = 5280 футам = 1609,33 *м*.


Рис. 80. Происхождение мер длины:
1) фут; 2) шток (или трость).

Географическая, морская или геометрическая миля английским адмиралтейством установлена в 6080,27 футов = 1853,25 *м*; она называется одновременно морским или адмиралтейским узлом.

О системах мер древних народов имеются разные сведения в дошедших до нас памятниках, но установить сколько-нибудь точно величины отдельных единиц не представляется возможным. Так, например, определение длины меридиана Эратосфеном в III в. до н. э. в 250 000 (или 252 000) стадиев не является для нас достаточно определённым, так как неизвестна точная длина стадия.

Мера длины **стадий** происходит из Вавилона. Стадий равнялся расстоянию, которое человек проходит спокойным шагом за промежуток времени от появления первого луча солнца при восходе его до того момента, когда весь солнечный диск окажется над горизонтом. Из астрономии известно, что этот «выход» солнца продолжается 2 минуты. За это время человек при средней скорости ходьбы проходит от 185 до 195 *м*. Но так как момент появления первого луча, равно как момент появления над горизонтом нижнего края солнца, вследствие преломления лучей в воздухе и других причин, точно уловить трудно, то определить точно длину стадия нельзя даже в том случае, если предполагать скорость движения человека постоянной.

Существует обширная литература по «математике великих пирамид» Египта. Разные авторы, от древних до современного французского академика Монтеля (1947) и др., находили в первоначальных размерах пирамид зафиксированными значения разных постоянных, например числа π. Утверждалось одно время, что сторона большой пирамиды — это $\frac{1}{500}$ часть градуса меридиана, откуда заключали, что у египтян была осуществлена идея о естественной единице длины (французский астроном Байи, в конце XVIII в.). Все эти утверждения имеют мало значения, так как основаны лишь на предположительных данных.

2. СТАРЫЕ РУССКИЕ МЕРЫ

Древнейшими из русских мер длины являются **локоть** и **сажень.** Длина локтя считалась «от локтя до переднего сустава среднего перста». Англичанин Гассе (1554) свидетельствует, что русский локоть равнялся половине английского ярда. Согласно «Торговой книге», составленной неизвестным автором для русских купцов в период между 1576 и 1611 гг., и по рукописи начала XVII в. «Цифирная счётная мудрость» три локтя были равны двум аршинам.

Первое упоминание о **сажени,** равной трём локтям, имеется в летописи под 1017 г. **Маховой саженью** называлось расстояние между концами пальцев распростёртых рук, **косой саженью** — расстояние от каблука левой ноги до конца пальцев поднятой вверх правой руки (давалось и другое объяснение происхождения длины косой сажени). В отличие от маховой и косой сажени, приравненная в XVI в. трём аршинам сажень называлась **новой, царской, казённой, печатной** или **орлёной.**

В разных книгах название древнерусской меры «сажень» производили от английского слова fathom. Однако нет никакой надобности искать корень слова «сажень» (произносится: саже́нь или са́жень) в иностранных языках. По «Толковому словарю живого великорусского языка» Владимира Даля слово «сажень» имело в старое время форму «сяжень». Глагол «сягать», в настоящее время не употребляемый, сохранился в языке в форме «досягать», в словах «досягаемый», «недосягаемый». Глагол «сягать» означал «доставать до чего-либо», откуда выражения: «разум сягает, да воля не владеет», «рука не сягает» и т. д. Отсюда естественное объяснение слова «сажень» или «сяжень»: досягаемое (рукой при косой сажени) расстояние.

Мера длины **пядь** — расстояние от конца большого пальца до конца малого при наибольшем возможном их раздвижении — появляется в актах XIV в.

Мера **аршин,** по свидетельству Карамзина, появилась от восточных народов и близка к турецкому локтю, называемому также аршином, и к персидской мере арши.

Мера расстояния **верста** появляется в замену более ранней меры **поприще.** Длина её принималась в разные эпохи различной — от 500 до 750 саженей. Писцовый наказ 1554 г. приравнивал её 500 саженям, что только в конце XVIII в. утвердилось окончательно.

В XVIII в. усилия правительства были направлены главным образом на уточнение существующих мер. Пётр I указом установил равенство трёхаршинной сажени семи английским футам.

Прежняя русская система мер, дополненная новыми мерами, получает окончательный вид:

миля	$=$ 7 верстам,
верста	$=$ 500 саженям $\approx$ 1,0668 километра,
сажень	$=$ 3 аршинам $=$ 7 футам $\approx$ 2,1336 метра,
аршин	$=$ 4 четвертям $=$ 16 вершкам $=$ 28 дюймам $\approx$ $\approx$ 71,12 сантиметра,
четверть	$=$ 4 вершкам $\approx$ 17,77 сантиметра,
фут	$=$ 12 дюймам $\approx$ 30,48 сантиметра,
дюйм	$=$ 10 линиям $\approx$ 2,54 сантиметра,
линия	$=$ 10 точкам $\approx$ 2,54 миллиметра.

Мерами площади государственных и владельческих земель были с XVI в. **десятина** и **четь,** равная 0,5 десятины. Первоначально десятина была квадратом со стороной в 50 саженей $\left(\frac{1}{10}\right.$ часть версты, откуда, возможно, происходит название «десятина»). «Книга сошного письма» 1629 г. упоминает десятину как прямоугольник со сторонами в 80 и 30 саженей. После некоторых колебаний эта **тридцатая,** или **казённая, десятина** была узаконена вместо **сороковой,** или **хозяйственной,** равной (40×80) квадратным саженям.

Крестьянские пашни измерялись **четвертями,** или **четями,** в 1200 или 1600 квадратных саженей, сенные покосы — **копнами** (мера, равная 0,1 десятины). Мерами земли при налоговых расчётах были **выть** и **соха** (в Новгороде **обжа**); размеры этих единиц зависели от качества земли и социального положения владельца (служилые, духовенство, крестьяне и т. д.).

Существовали ещё различные местные меры земли: коробья, верёвка, жеребья и др.; величины этих мер менялись от одной местности к другой и не имели определённого и постоянного значения. Для землемеров, называвшихся в минувшие века межевщиками и писцами, были составлены руководства, называвшиеся книгами сошного или вытного письма. Известен экземпляр этой книги, относящийся к 1629 г., и имеются указания, что он является копией с более старого экземпляра, составленного при Иване Грозном в 1556 г. (Б. В. Гнеденко, Краткие беседы о зарождении и развитии математики, 1946, стр. 12).

О древних мерах ёмкости наши сведения менее полны. Объёмные меры не были связаны с мерами веса, образцы их до нас не дошли, и судить о величине этих мер трудно.

Основная мера жидкостей **ведро** была окончательно определена в 1835 г. как объём 30 фунтов перегнанной воды при её наибольшей плотности: этот объём равен 750,5 кубического дюйма. Тогда же были узаконены меры: **штоф** — десятая часть ведра, полуштоф, четверть и **чарка,** как сотая часть ведра.

Система мер жидкости получила вид:

бочка	= 40 ведрам ≈ 4,9196 гектолитра,
ведро	= 10 штофам ≈ 12,299 литра,
штоф	= 2 бутылкам = 10 соткам (чаркам) ≈ ≈ 1,2299 литра,
сотка (чарка)	= 2 шкаликам ≈ 0,123 литра.

До XVI в. мерами сыпучих тел были **бочка** и **кадь**, или **оков** — та же кадь, но окованная железным обручем у краёв, чтобы нельзя было её урезать. По летописи XVII в. кадь была хлебной мерой, вмещавшей 14 московских пудов ржи (около 230 *кг*). Она делилась на две **половинки** или 8 **осьмин** (четвериков). В XVIII в. появляется мера **гарнец**, по-видимому, из Польши; гарнец, равный $\frac{1}{8}$ четверика, был в употреблении до XX в. Существовали разные местные меры — коробья, пуз, рогожа, лукно и др., величины которых установить нельзя.

К XVIII в. система мер сыпучих тел приняла вид:

четверть = 8 четверикам ≈ 2,0991 гектолитра,
четверик = 8 гарнцам ≈ 26,239 литра,
гарнец ≈ 3,279 литра.

Указом 1835 г. гарнец установлен равным 200,15 кубического дюйма или объёму 8 фунтов перегнанной воды при наибольшей её плотности.

Меры веса (массы)

Древнейшей русской весовой единицей является **гривна,** или **гривенка**. В настоящее время можно считать установленным, что нормальный вес гривны составлял 409,512 грамма. Позднее вошёл в употребление фунт в 96 золотников.

Происхождение терминов «гривна» и «пуд» (последний встречается уже в XII в), не установлено. Производство слова «пуд» от латинского pondus — вес, даваемое некоторыми авторами, неубедительно. Термин «фунт» происходит от немецкого названия меры веса.

Термин «пуд» употреблялся в смысле вес или тяжесть. Должностные лица, проверявшие весы, назывались пудовщиками. В одном из рассказов М. Горького в описании амбара кулака читаем: «На одном засове два замка — один другого пудовей (тяжелей)».

К концу XVII в. сложилась система русских мер веса в следующем виде:

ласт = 72 пудам,
берковец = 10 пудам,
пуд = 40 большим гривенкам, или фунтам,
пуд = 80 малым гривенкам,
пуд = 16 безменам ≈ 16,38 килограмма,

безмен $= 5$ малым гривенкам $= \frac{1}{16}$ пуда ≈ 1 килограмму;

большая гривенка, или фунт, $= 2$ малым гривенкам $= 4$ малым полугривенкам $= 96$ золотникам $\approx 409{,}512$ грамма,

золотник $= 24$ почкам $\approx 4{,}266$ грамма.

Безменом стали называться и ручные весы с подвижной опорной точкой. По словарю Даля на севере и в Сибири безменом называется вес в $2^1/_2$ фунта (≈ 1 *кг*) при купле-продаже некоторых товаров: масла, икры, рыбы, хмеля и т. д.

В XVIII в. был уточнён вес фунта (гривенки) как вес 25,019 кубического дюйма воды при её наибольшей плотности и введено деление фунта на 32 лота, лота — на 3 золотника и золотника — на 96 долей.

Наряду с торговым фунтом с XVIII в. в России употреблялся аптекарский, или нюренбергский, фунт, равный римской либре в 84 золотника. Аптекарский фунт делился по образцу римского на унции. Введённый в употребление аптекарский вес составил особую систему, отличную от торговой:

фунт $= 12$ унциям,

унция $= 8$ драхмам,

драхма $= 3$ скрупулам, вес грана $\approx \frac{1}{16}$ грамма,

скрупул $= 20$ гранам (зёрнам).

В России аптеки уже к началу XX в., ранее чем в западноевропейских странах, перешли на метрическую систему веса.

Денежная система русского народа

Названия мер веса у многих народов совпадали с названиями денежных единиц, так как иногда денежными единицами служили весовые единицы металла. Названия французской монеты ливр (livre — название серебряной монеты и в то же время единицы веса) и английской денежной единицы фунт стерлингов иллюстрируют это явление.

В качестве русской металлической денежной единицы уже в X в. упоминаются серебряные гривны. Существовала и весовая единица гривна. Как денежная единица гривна давно вышла из употребления, однако слово «гривна» в литературе сохранилось. Так, Н. А. Некрасов в поэме «Кому на Руси жить хорошо» говорит: «Иная гривна медная дороже ста рублей».

Чеканные русские монеты известны со времён Владимира Святославича (X в.).

В летописях, относящихся к 1381 г., впервые встречается слово «денга» (с конца XVIII в. стали писать «деньга»), которое затем в течение столетий употреблялось как название монетной единицы. У татар имелась монета с аналогичным названием, но с другим содержанием серебра, поэтому нельзя утверждать о заимствовании русской монетной системы у татар. Шесть денег составляли алтын, приравненный, трём копейкам. Слово «алтын»

Рис. 81. Главная палата мер и весов, теперь Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии имени Д. И. Менделеева в Ленинграде.

происходит от татарского «алты» — шесть, так что денга равнялась полукопейке.

Первое употребление слова «рубль» относится к XIII в. Слово это, по-видимому, происходит от глагола «рубить». Рубль в разных княжествах, да и в качестве общегосударственной монетной единицы в последующие века содержал различные количества серебра.

В 1535 г. (в начале правления Ивана IV) были выпущены монеты-новгородки, с рисунком всадника с копьём в руках, получившие название копейных денег. Отсюда производят слово «копейка».

История развития русской монетной системы рассказана в книге И. Г. Спасского «Русская монетная система» (Ленинград, 1962, изд. Гос. Эрмитажа).

В XVIII в. содержание серебра в рубле снизилось до 18 *г* и сохранилось до прекращения чеканки полноценной серебряной монеты в 1915 г. Разменная монета имела другое относительное содержание серебра.

В 1897 г. в основу русской денежной системы был принят золотой рубль, содержащий 17,424 доли ($\approx 0{,}565$ *г*) золота, и установился свободный обмен бумажных денег на звонкую монету.

Заслуживает быть отмеченным тот факт, что в древнерусской системе мер несколько раз проявляется стремление ввести десятичное деление мер (десятина, копна, штоф — $\frac{1}{10}$ ведра, чарка — $\frac{1}{100}$ ведра).

Русская монетная система была десятичной с выпуска в 1704 г. рублёвых монет, приравненных 100 копейкам. В США в 1793 г. вводится доллар, равный 100 сентам, во Франции в 1795 г. выпускается франк, равный 100 сантимам.

В нашем обзоре становления русских мер отмечались факты изменения величины разных мер, что вызывалось условиями торговли с западными и восточными народами.

Акад. Б. Д. Греков пишет: «Русский четверик есть не просто перевод римского термина quadrantalis, но и совершенно точно соответствует его размеру. Обе эти меры содержат в себе по 26,26 литра, точно так же как римская **медимна** и русская мера **полосьмины** равны 52,52 литра. Русская полосьмина равна 2 четверикам. Столь точное совпадение, и филологическое и цифровое, является не случайностью, а вызвано издавними интенсивными торговыми связями Руси с восточными провинциями Римской империи» («Культура Киевской Руси», 1947, стр. 11).

Значение правильности торговых мер и весов для хозяйственной жизни понималось всегда, поэтому у всех народов многократно принимались правительственные меры к введению единообразных мер и контролю за ними. В русской истории первые попытки в этом направлении записаны в церковном уставе

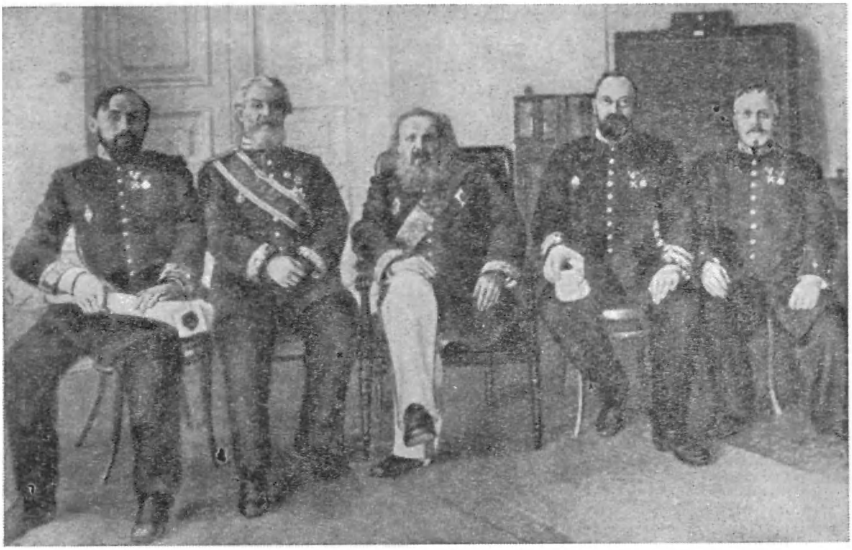


Рис. 82. Работники Главной палаты мер и весов (в центре Д. И. Менделеев, вправо от него профессора Егоров и Блумбах).

Владимира (X в.). В нём говорится: «...искони установлено есть и поручено есть епископам... весы и всякие мерила... блюсти без пакости, ни умножити, ни умалити, за все то дати ему ответ в день великого суда...» Передача этой обязанности церкви было в то время естественно, так как на церковной площади происходили базары, при церквах были лари для хранения договоров по торговым сделкам, в подвалах церквей хранились товары, при церквах находились верные весы и меры.

С образованием Московского государства (XV в.) и после присоединения к нему Новгорода, Пскова, позднее Казани, с развитием оживлённых торговых сношений с иностранцами через Архангельск надзор за мерами и весами перешёл от духовенства к специальным органам центральной гражданской власти — к Приказу большого прихода, или большой казны.

Начинаются мероприятия к установлению единообразных мер во всём государстве. В 1550 г. рассылаются «печатные медные ведра», при Иване Грозном запрещается иметь частные весы и предписывается взвешивать товары у пудовщиков за установленную таксу. «Новоторговый устав» 1667 г. разрешает держать в домах лишь весы «малые, которые поднимают до десяти пудов», и безмены до 2—3 пудов, однако на этих малых весах никому ничего ни продавать, ни покупать не разрешается. Иноземным купцам строго предписывается «весить всякие заморские и русские товары в таможнях». За неверные, «воровские» весы и гири товары купцов «отписывались на великого государя бесповоротно», а сами торговцы с их семьями подвергались ссылке.

В конце XVII в. применение «неорлёных» мер запрещалось под страхом смертной казни. В 1685 г., по жалобе иностранных купцов на неправильность гири, по которой с них взимали пошлину золотом, было в Приказе большой казны в присутствии жалобщиков взвешено «100 золотых, добрых и правдивых», изготовлена «заорлёная» гиря и послана «к Архангельскому городу» для производства расчётов с иностранными купцами. В Москве существовала Померная изба с образцами мер.

Развитие производительных сил страны и приобретение промысловыми предприятиями фабричного характера при Петре I заострили внимание правительства на упорядочении системы мер. Бургомистрам поручается надзор за мерами (1700), контролёрам адмиралтейств и верфей вменяется в обязанность каждое полугодие осматривать меры и весы в магазинах, «дабы упредить в том воровские умыслы» (1722).

В XVIII и XIX вв. правительство проводит ряд мероприятий по урегулированию системы мер и весов.

Комиссия о мерах и весах 1736 г. установила точную величину аршина по сохранившемуся в кабинете Петра I полуаршину в 14 английских дюймов и образцовый фунт, по которому в 1835 г. был изготовлен платиновый фунт, являвшийся прототипом нашей системы весов до революции. Он равнялся 0,40951241 *кг* (с точностью до стомиллионной).

Закон о мерах и весах 1797 г. предписывал изготовить гири весом в 1 и 2 пуда, в 1, 3, 9 и 27 фунтов и в 1, 3, 9, 27 и 81 золотник. Как видим, закон учёл те преимущества троичной шкалы, о которой подробно говорилось в главе о «задаче Баше — Менделеева». Это мероприятие является свидетельством весьма передового характера метрологической мысли в России в ту отдалённую от нас эпоху. Следует указать, что в работах по вопросам мер и весов принимал очень большое участие Л. Эйлер.

Комиссия образцовых мер и весов 1827 г. разработала «Систему Российских мер и весов», которая, став законом 11 октября 1835 г., действовала до введения у нас метрической системы. Она установила те основные единицы русских мер, которые приведены в общем обзоре.

Закон о мерах и весах 1842 г. создал **Депо образцовых мер и весов для хранения эталонов,** поверки копий с них и для научно-исследовательской работы по вопросам метрологии.

В 1892 г. учёным хранителем переименованного в 1893 г. в **Главную палату мер и весов** Депо образцовых мер и весов был назначен великий химик Д. И. Менделеев, остававшийся на службе русской метрологии до своей смерти в 1907 г.

За этот период была пересмотрена вся система мер и весов, чего настойчиво требовал рост капиталистической России. Главная палата мер и весов провела большую работу: были возобновлены прототипы русских мер (1895), изданы новые законы о мерах и весах (1899), организованы исследовательская работа по метрологии и поверочное дело.

В первые годы революции Главной палатой мер и весов осуществлено введение метрической системы, о чём будет речь особо.

3. МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР

Все описанные системы мер страдали многими недостатками, из которых рассмотрим основные.

Единицы мер были неточными, так как представляли среднюю величину некоторых переменных величин. Не существовало никакой простой связи между основными единицами мер для разных величин. Единичные отношения мер одной и той же величины были различны, что усложняло вычисления, в особенности арифметику именованных чисел [65]. В каждом отдельном государстве имелись рядом одна с другой различные системы мер для одной и той же величины.

В течение ряда веков делались частичные попытки устранения недостатков систем мер: узаконивались отдельные единицы мер, устанавливались единые меры для той или иной величины, осуществлялся государственный контроль над торговыми мерами. Регулирование системы мер правительством предусмотрено уже в диалоге Платона «Законы», причём ставится требование упрощения системы. Римские сатирики Персий и Ювенал упоминают о чиновниках, в обязанность которых входило «бить неполномерные кружки» и учинять над пользующимися ими расправу («Римские сатиры», М., 1957, стр. 92 и 237).

Данте в «Божественной комедии» дважды («Чистилище», песнь XII, 105, и «Рай», песнь XVI, 104) упоминает о тех, «кто кадкой устыжён», и о времени, когда «чтилась кадка», имея в виду громкие мошенничества с урезыванием мерной кадки для продажи соли (дело Дуранте Кьярамонтези).

Коренное решение вопроса о мерах в целом было проведено французским революционным правительством в конце XVIII в. В результате принятых революционным правительством шагов возникла так называемая **метрическая система мер**, принятая в настоящее время почти всем миром. Не введена она в обязательном порядке в бытовое употребление ещё в Англии и Соединённых Штатах Америки.

Последним победным шагом десятичной метрической системы является постановление правительства Индии — со дня памяти Ганди 2 октября 1956 г. ввести десятичную систему денег и начать введение повсеместно в Индийской республике метрической системы мер вместо существовавших там до 150 разных систем.

Уже в древности была осознана мысль, что государство должно иметь возможно точные образцы мер, по которым население могло бы проверять свои употребляемые меры. Известно, что в Риме в Капитолии, в центре всего государственного аппарата, находился каменный эталон мер длины и веса. Померная изба в Москве с образцами фунта и других мер выполняла ту же задачу. Подобные учреждения существовали у всех народов, достигших относительно высокого культурного развития. Однако такое решение весьма важного вопроса хозяйственной жизни является недостаточным. Существующий, притом технически несовершенный, эталон меры с течением времени изменяется и изнашивается. Возник вопрос, не может ли быть поставлена в основу системы мер природная величина, которую можно было бы считать неизменной и по которой при надобности можно было бы восстановить точную величину употребляемых образцов мер.

В 1664 г. голландский математик и физик Гюйгенс предложил в качестве единицы длины длину секундного маятника. Французский математик Лакондамин в 1740 г. рекомендовал для этого длину секундного маятника на экваторе, французский физик Бугер — длину секундного маятника на широте в 45°. Французский же математик Мутон в 1670 г. первый предложил взять основную единицу длины из размеров Земли, назвал её милей или «миллиаром». Он предложил длину одной минуты дуги меридиана при делении её по десятичной системе. Это идея предполагала знание достаточно точной длины дуги меридиана.

Эратосфен в III в. до н. э. вычислил методом, который по идее не оставляет желать лучшего, длину дуги меридиана. Измерения дуги меридиана были через тысячи с лишним лет вновь произведены арабскими астрономами и, начиная с XVI в., многими другими учёными. Наиболее точными в XVIII в. считались результаты французского астронома Пикара (1620—1682). Французский астроном Кассини (1714—1784) повторил предложение Мутона принять тогдашнюю французскую единицу длины — туаз — равным одной 60 000-й доле длины дуги меридиана в один градус.

Так до сих пор излагалась предыстория метрической системы. Однако здесь необходима существенная поправка.

Предложение длины маятника в качестве единицы длины впервые было высказано польским учёным XVII в. Станиславом Пудловским (1597—1647), профессором Краковского университета. После ранней смерти Пудловского эта идея была разработана его другом Титом Бураттини (1615—1682) и опубликована в подробном изложении в Вильне в 1675 г. в книге «Универсальная мера». Бураттини в этой книге вводит термин «метр» для обозначения единицы длины, за которую принимает длину секундного маятника. В настоящее время приоритет польских учёных Пудловского и Бураттини в этом вопросе установлен совершенно неоспоримо и признаётся авторитетнейшими историками точных наук [66].

Жозеф Лагранж.

Пьер Лаплас.

Неоднократно в учёных и в популярных работах высказывалась мысль, что идея природной единицы длины была осуществлена в Египте. Однако по поводу этих утверждений следует помнить слова Деламбра, одного из главных тружеников при создании метрической системы: «не будем размышлять об этих догадках, построенных на весьма шатких основаниях... авторами, старающимися отыскать в работах древних всё, что имеют лучшего новейшие учёные».

Ко второй половине XVIII в. во французских торгово-промышленных кругах созрела мысль о необходимости упорядочить систему мер. В Учредительном собрании 1790 г., несмотря на обилие политических вопросов, которые, казалось бы, являлись гораздо более злободневными, рассматривался основательно вопрос о создании единой системы мер. Впрочем, и этот вопрос не был лишён политического интереса: ораторами руководило стремление искоренить до мельчайших следов все порождения той феодальной системы, которую никто уже не смел защищать. Докладчиком выступал князь Талейран, красноречие которого подогревалось главным образом надеждой получить по этому делу заграничный паспорт, чтобы скорее стряхнуть с ног пыль той нарождающейся новой Франции, почва которой стала для князя слишком накалённой. В мае 1790 г. Учредительное собрание издало декрет, которым просило короля «написать её величеству королеве британской и просить её побудить английский парламент содействовать вместе с французским национальным собранием утверждению единицы мер и весов для того, чтобы под покровительством обеих наций могли собраться комиссары Академии наук (французской) в количестве, равном с членами, избранными Лондонским королевским обществом, в месте, которое будет взаимно признано наиболее подходящим, для того, чтобы определить на широте в 45 градусов, или на любой другой широте, которая могла бы быть предпочтена, длину маятника и вывести из неё неизменный образец для всех мер и для весов». Декрет этот, который одновременно возлагал на Академию наук задачу изыскать простую систему мер, был утверждён 22 августа королём.

Академическая комиссия, состоявшая из известнейших учёных Бордá, Кондорсé, Лавуазьé, Лагрáнжа, Лаплáса и др., решила положить в основу системы мер десятичный счёт.

Другая комиссия, в составе Борда, Лагранжа, Лапласа и Монжа, предложила за основу новой системы мер единицу длины. За последнюю комиссия рекомендовала принять какую-нибудь долю длины меридиана. Принятие за единицу длины секундного маятника было отвергнуто по той причине, что эта длина заключает посторонний элемент, именно время, и произвольный элемент — деление суток на 86 400 секунд.

26 марта 1791 г. Национальное собрание приняло предложение Академии и поручило ей заняться определением длины дуги меридиана между городами Дюнкерком и Барселоной. Эта дуга имеет длину в 9,5 градуса, из которых 3,5 градуса находятся к югу и 6 градусов к северу от средней параллели (45°). Учитывалось и то, что обе эти точки находятся на уровне моря. Руководство измерительными работами было возложено на членов Академии наук Деламбра и Мешена.

В настоящее время мысль о том, что измерением дуги меридиана может быть создана **природная постоянная единица длины**, которую в случае необходимости можно будет вновь восстановить, является явно необоснованной. Каждое повторное определение длины дуги меридиана давало новое значение, что видно из данных последующих измерений:

Автор	Год	Сжатие земного сфероида	Длина четверти меридиана в метрах
Деламбр	1800	1 : 334	10 000 000
Бессель	1841	1 : 299,2	10 000 856
Кларк	1880	1 : 293,5	10 001 868
Гельмерт	1906	1 : 298,3	10 002 067
Красовский	1936	1 : 297,0	10 002 286

Результаты измерений советского геодезиста Красовского считаются самыми точными [67].

По последним данным Института теоретической астрономии Академии наук СССР, диаметр Земли оказался более чем на 500 метров меньше принятого, а поверхность Земли соответственно на 50 тысяч квадратных километров меньше, чем считалось до сих пор (сообщение заместителя директора Института теоретической астрономии профессора И. Д. Жонголовича от 22 мая 1957 г.).

Жан Деламбр.

Конечно, и Лапласу было ясно, что путём измерения дуги меридиана постоянной природной длины метра найти нельзя. Но Лаплас горячо выступал за измерение меридиана, так как для окончания его бессмертного труда «Небесная механика» было необходимо знать с возможной точностью размеры Земли (А. Н. Крылов).

Весной 1793 г. выяснилось, что работы по измерению дуги меридиана должны быть ещё продолжены. Академия наук представила Конвенту отчёт, в котором предложила утвердить **временный метр**, основанный на результатах измерения Лакайля 1740 г. Она предлагала, кроме того, отношения, которые должны быть установлены между мерами линейными, мерами объёмов, масс, денежных единиц, и систему названий новых мер. Конвент утвердил представление Академии, устанавливая вместе с тем, что новые меры становятся обязательными через год. Этот срок не был выдержан, и современная система названий метрической системы была утверждена лишь 18 жерминаля III г. (7 апреля 1795 г.) по представлению депутата Приёра-Дювернуа.

Закон 7 апреля 1795 г., установив временный метр, указывает, что работы комиссии 1791 г. будут продолжаться. Измерительные работы были закончены лишь к осени 1798 г. и дали окончательную длину метра в 3 фута 11,296 линии вместо 3 футов 11, 44 линии, какую длину имел временный метр 1795 г. (старинный французский фут равнялся 12 дюймам, дюйм — 12 линиям, туаз — 6 футам).

В это время власть в Париже была уже в руках Директории, министром иностранных дел которой состоял Талейран, докладчик первого проекта реформы системы мер. Он предложил созвать представителей союзных с Францией и нейтральных стран для обсуждения новой системы мер и весов для придания ей международного характера. В сентябре 1798 г. делегаты

Пьер Мешен.

съехались (среди них известный геометр Маскерони [68]), и 25 мая 1799 г. Международный конгресс заявил об окончании своих работ по проверке определения длины основных эталонов. 22 июня того же года (4 мессидора VII г. республики) изготовленные окончательные прототипы метра и килограмма были сданы в Архив Французской республики на хранение, почему эти эталоны получили название архивных.

Через полгода, уже при новом французском правительстве, во главе которого стоял Бонапарт, законом 10 декабря 1799 г. (19 фримера VIII г. республики), был отменён временный метр, введённый в 1795 г., и вместо него единицей длины признан архивный метр. Статья 4-я закона говорит: «Будет изготовлена медаль, чтобы передать памяти потомства время, когда система мер была доведена до совершенства, и операцию, которая послужила ей основой». Надпись на лицевой стороне медали будет: «На все времена, для всех народов», а внизу: «Французская республика, VIII год».

Медаль эта не была изготовлена. Лишь в 1837 г., когда французское правительство окончательно решило ввести метрическую систему во всеобщее и обязательное употребление, одно частное лицо заказало проект такой медали, по-видимому, оставшийся неосуществлённым.

Законом 10 декабря 1799 г. основой метрической системы признан архивный метр, т. е. длина конкретного эталона. Так же был определён килограмм, как вес определённого прототипа. Эти архивные эталоны лишь через 90 лет уступили своё место новым, конкретным же прототипам, получившим название международных.

После реставрации королевской власти во Франции в 1815 г., когда уничтожались все нововведения революции, и метрическая система перестала быть обязательной. Закон 4 июля 1837 г. вновь установил обязательность метрической системы во Франции с 1 января 1840 г.

В 1870 и 1872 гг. международная комиссия метра сначала двадцати четырёх, позднее тридцати государств рекомендовала создать в Париже специальное международное бюро мер и весов, которому поручается ведать изготовлением и хранением интернациональных мер. Дипломатическая конференция метра в 1875 г. утвердила этот план. С 1787 г. такое бюро было создано в Париже на средства двадцати государств — участников дипломатической конференции метра [69].

Следует подчеркнуть роль России в окончательном установлении международной системы мер.

В 1869 г. академик Б. С. Якоби внёс предложение в нашу Академию наук о необходимости подвергнуть обсуждению в международной комиссии вопросы о дальнейшем упорядочении практического применения метрической системы. Это представление, поддержанное нашей Академией, и послужило толчком к созыву международной комиссии 1870 г. в Париже для обсуждения вопроса об изготовлении новых метрических прототипов и точных с них копий. Отчёт делегатов нашей Академии [70] подчёркивает: «Таким образом, учёный мир обязан России тем, что реформа метрических прототипов была предпринята в благоприятное к тому время, а Академия наша вправе гордиться тем, что упомянутая реформа проведена на основаниях, ею выработанных с самого начала и всё время поддерживаемых ею против расходившихся иной раз мнений».

Комиссия 1870 и 1872 гг. (перерыв в работах её был вызван франко-прусской войной) вынесла ряд постановлений, которые вытекали из предложений Петербургской Академии наук и составляют основания международной системы мер в настоящее время. Из этих постановлений нужно отметить следующие.

Решено было изготовить новый международный метр и новый международный килограмм, которые будут храниться в Париже, а равно копии для всех государств из сплава 90% платины и 10% иридия. Это постановление могло быть выполнено только в 1888 г. вследствие совершенно непредвиденных техни-

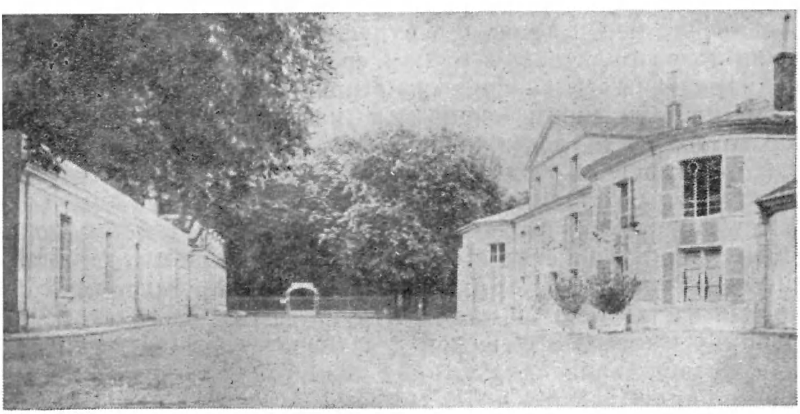


Рис. 83. Международное бюро мер и весов в Париже.

Борис Семёнович Якоби.

ческих трудностей. 24 сентября 1889 г. новая международная конференция утвердила изготовленные эталоны, причём французский министр иностранных дел подчеркнул в своей речи почин России в этом международном предприятии. 27 сентября 1889 г. международные эталоны были помещены в подвале Международного бюро в Париже и ключи от трёх различных замков к железной двери подвала в запечатанных конвертах вручены председателю Международного комитета метра, главному хранителю национальных архивов Франции и директору Международного бюро мер. Доступ к хранилищу прототипов дозволялся не иначе, как с разрешения международного комитета и в присутствии двух его членов. Отчёт делегатов Петербургской Академии наук заканчивался словами:

«Таким образом, с утверждением новых международных метрических прототипов и с раздачей национальных прототипов большинству государств, желания, высказанные 20 лет тому назад нашей Академией, по почину Якоби, вполне осуществились. Благодаря учреждению международного центра, где хранятся международные прототипы, надлежащим образом помещённые, и где всегда возможно будет, пользуясь приборами самого высокого научного достоинства, производить под международным контролем новые сравнения с этими прототипами, а равно благодаря раздаче всем государствам тождественных прототипов, сравненных вполне точно, на всём земном шаре свершилось объединение мер и весов, и в будущем не будет уже больше возникать затруднений в точном сравнении между собой величин, измеренных в различных странах. Имя Петербургской Академии наук, своим почином и настойчивостью существенно способствовавшей достижению этих счастливых результатов, останется навсегда связанным с историей этого великого усовершенствования в области точных знаний».

История первой стадии работ по созданию метрической системы подробно описана в трёхтомном собрании материалов, изданных в годы 1806, 1807 и 1810 Парижской Академией наук. Вводная часть этого громадного труда издана на русском языке в книге «Основы метрической десятичной системы или измерение дуги меридиана, заключённой между параллелями Дюнкерка и Барселоны, Мешеном и Деламбром, 1926 г.».

Главный деятель по выполнению предварительных работ по созданию новой системы мер Деламбр пишет: «Из всех хороших предприятий, которые у нас останутся в памяти о Французской революции, это то, за которое мы всего менее заплатили, и если это великое нововведение испытало некоторое сопротивление, то оно всецело зависело от того духа инертности и лености, который всегда начинает с отталкивания самых полезных нововведений».

Осуществление этой реформы системы мер стало возможным только в эпоху революции. Оно требовало и революционных темпов, что хорошо понимал Деламбр, спокойно относившийся к некоторым эпизодам, которые могли бы вызвать в нём иное чувство.

В самый разгар своих измерительных работ он получил извлечение из протоколов Комитета Общественной Безопасности Национального Конвента от 3 нивоза II г. Французской республики единой и неделимой (23 декабря 1793 г.):

«Комитет Общественной Безопасности, принимая в соображение, насколько важно для улучшения народного сознания, чтобы те, кто стоит у управления, не вверяли должностей и не давали поручения никому, кроме людей достойных доверия за их республиканские доблести и их ненависть к королям, после сношения по этому поводу с членами комитета народного просвещения постановляет, чтобы Бордá, Лавуазьé, Лаплáс, Кулóн, Бриссóн и Делáмбр перестали быть, считая с сего дня, членами комиссии мер и весов... постановляет, кроме того, чтобы члены, остающиеся в комиссии мер и весов, сообщили в скорейшем времени, в каких людях она имеет **необходимую нужду** для продолжения своих работ, и чтобы они в то же самое время поделились своими взглядами на средства **в возможно наискорейшем времени ввести меры в пользование для всех граждан, пользуясь революционным порывом...**

Подписано: Барер, Робеспьер и др.».

Деламбр пишет по поводу этого документа:

«Очевидно, что первые строки этого постановления содержат лишь пустой предлог. Доверяя мне такое трудное предприятие, каким было измерение меридиана в столь грозные времена, конечно, не требовали, чтобы я покинул свои колокольни и сигналы, чтобы идти по клубам выставлять на показ республиканские чувства и ненависть к королям; это не было бы средством ускорить работу, относительно которой раздавались жалобы, что нужно так долго дожидаться её результатов. Ясно было, что хотели... значительно упростить план, а с этою целью пожелали, чтобы в комиссии были лишь те лица, в которых имели необходимую нужду. Также желали использовать революционный порыв, и эта мысль была удачна; но, может быть, было возможно прийти к тому же концу другими путями».

Все произошло именно так, как понимал дело Деламбр: ускоренными темпами был введён временный метр, а дело было доведено **до конца** «другими путями», т. е. выполнением полностью первоначального плана.

Эти выдержки из подлинных документов показывают ошибочность взгляда авторов, усматривающих в постановлении, революционного органа власти один из эксцессов того бурного времени.

Революция в системе мер и весов стала возможной только в руках революционного правительства и при применении революционных мероприятий. Великая Октябрьская революция в России распространила эту систему на $\frac{1}{6}$ часть мира, где метрическая система стала обязательной с 1 января 1927 г., узаконена же она была уже декретом Совета Народных Комиссаров от 14 сентября 1918 г.

Из исторического обзора создания и введения в практику метрической системы мер ясно, что метром с 1799 г. называлось расстояние между штрихами на международном эталоне, находящемся в Париже. Первоначальное намерение принять за единицу $\frac{1}{40000000}$ часть длины дуги меридиана объясняет лишь происхождение длины этого эталона. Это значит, что метр не является величиной, которую можно было бы вновь восстановить измерением дуги меридиана, если бы существующий эталон погиб. Основное преимущество метрической системы заключается в том, что в основании её лежит десятичная система. Это обстоятельство упрощает все вычисления и является причиной, почему эта система принята почти всем миром.

Важным преимуществом метрической системы является то, что единицы всех других величин, кроме единиц времени и углов, связаны с метром и построены также в десятичной системе.

Измерение времени связано с измерением углов. Уже вавилоняне делили окружность на 360 частей, и дуги в пределах градуса по шестидесятеричной шкале. Это деление было принято греческими астрономами. Термин «градус» (ступень) и его обозначение (°) ведут своё начало от Птолемея: он писал слово μοίραι — части — сокращённо μ°, откуда, по-видимому, образовался символ (°).

Делались неоднократные предложения о введении десятичного деления в меры дуг и времени. После обсуждения вопроса на ряде международных конференций в Вашингтоне в 1884 г., на которой был принят Гринвичский меридиан за первый, на международном хронометрическом конгрессе в Риме в 1900 г. и на следующих международных съездах эта мысль была оставлена.

Международное бюро мер и весов 12 сентября 1933 г. констатирует: «попытка ввести десятичное счисление времени канула в воду... Нет оснований возвращаться к этому предложению». Частичное употребление десятичных делений (часа, градуса, минуты, секунды) употреблялось и употребляется и «не вызывает принципиальных возражений» (отзыв Пулковской обсерватории). Относительно широко распространено деление прямого угла на 100 частей и название этой сотой части **градом.**

Из новейшей истории систем мер и весов нужно отметить следующие факты.

Метром признаётся длина международного метра, который хранится в Париже. Длину эталона можно более точно, чем это удавалось сделать при прежних измерениях, выразить в длинах волн светового луча определённого цвета. Отсюда возникла мысль определить метр как длину того числа волн светового луча, которое получится при самом тщательном измерении этими волнами международного эталона. Так как длина световой волны считается самой постоянной из природных величин, то без обращения к парижскому эталону можно установить длину метра в любой хорошей физической лаборатории.

14 октября 1960 г. на одиннадцатой сессии Генеральной конференции мер и весов, принято новое определение метра: метр есть длина 1 650 763,73 волны оранжево-красной линии криптона 86.

4. МЕРЫ ВРЕМЕНИ И КАЛЕНДАРЬ

Мерой времени человеку с древнейших времён служили сутки — промежуток времени от одного полдня до другого, в течение которого Земля совершает оборот вокруг своей оси. Продолжительность средних солнечных суток считалась многие столетия величиной постоянной. Основной мерой времени являлась секунда, равная $\frac{1}{86400}$ части суток.

Земля вращается неравномерно; астрономическое время, показываемое вращением Земли вокруг своей оси, нельзя считать точным. Точнее и легче определяется продолжительность тропического года, т. е. время совершения Землёй полного оборота около Солнца. На той же конференции 1960 г. определена секунда, как $\frac{1}{31\,556\,925\,984\,7}$ часть продолжительности тропического года.

В практической жизни счёт времени ведётся при помощи часов, устройство которых в течение тысячелетий пережило огромную эволюцию.

Вавилоняне изобрели солнечные часы в виде палочки, прикреплённой вертикально на дне выдолбленной в камне или кирпиче чаши в форме полушара.

Первые солнечные часы в Греции установлены около 550 г. (Анаксимандр), в Риме — в 164 г. до н. э. День разбивали на части по движению тени столбика по делениям края чаши.

Постепенно часы приняли современный вид — циферблата с палочкой, отбрасывающей тень [71].

Водяные часы, определяющие промежутки времени по истечению воды (так же устроены песочные часы современных лечебниц), известны в древнем Египте, Вавилоне и употреблялись уже около 1500 г. до н. э. Древнейший будильник изобретён Платоном около 350 г. до н. э. В 507 г. н. э. Боэций изготовил для Бургундского короля водяные часы с боем (с металлическими шариками, падавшими в металлическую же чашку). Около 815 г. во дворце византийского императора Теофила имелись большие часы неизвестного устройства.

Первое достоверное упоминание о часах с колёсами имеется у Данте и относится ко времени около 1300 г. Первые часы с боем упоминаются в 1336 г. (в Милане), первые башенные часы— на Страсбургском соборе в 1354 г. Первые пружинные часы сконструированы около 1400 г., первые малые переносные часы (предшественники карманных) построил Генлейн около 1511 г. В 1583 г. Галилео устанавливает факт, что качания маятника малых размахов совершаются в равные промежутки времени (изохронность качаний). Около 1612 г. Иост Бюрги создаёт в Праге часы с маятником, а в 1656 г. Гюйгенс, независимо от Галилео, даёт описание установки для маятниковых часов.

Тот же Гюйгенс в 1674 г. в Париже изготовляет первые ча-

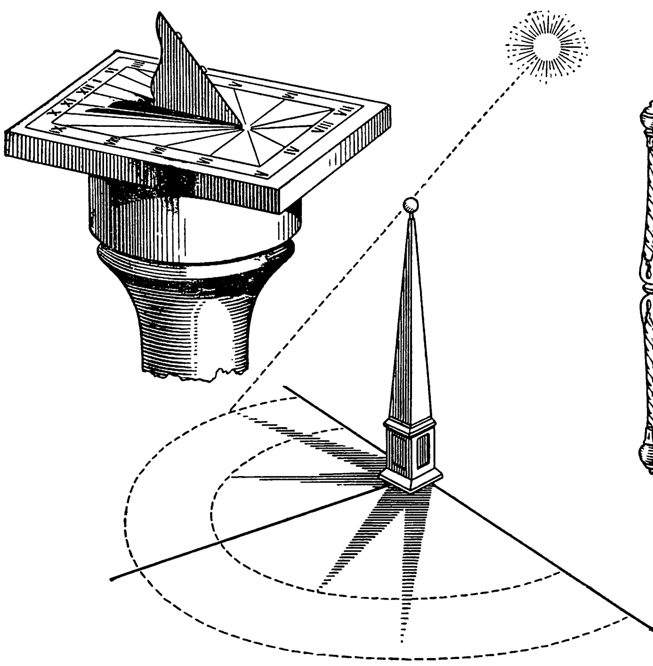


Рис. 84. Солнечные часы.

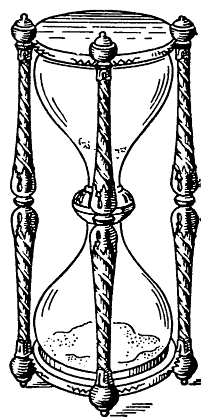


Рис. 85. Песочные часы.

сы со спиралевидной пружиной. Около 1722 г. Камюс в Париже изобрёл часы с годовым заводом, и с этого времени Франция становится ведущей страной в часовой индустрии. В 1761 г. корабельный хронометр Харрисона при проверке за 161 сутки показывает отклонение от точного солнечного времени лишь на 5 секунд, и мастер получает, после продолжительной тяжбы, премию правительства в 200 000 золотых рублей.

Первые карманные часы описаны в 1679 г. С этого же времени показания часов достигают точности минуты, и на часах появляется минутная стрелка.

Христиан Гюйгенс.

Деление часового циферблата на 12 частей было введено в конце XVI в. чешско-венгерским королём Рудольфом II, астрономом, в честь которого Кеплер и Тихо Браге назвали составленные ими новые таблицы движения планет «Рудольфовыми таблицами». Предлагавшееся естественное деление циферблата на 24 части было отвергнуто отчасти по практическим соображениям [72].

Греки до знакомства с вавилонской астрономией делили как день, так и ночь на три вахты. Во времена Аристотеля (384—322 гг. до н. э.) существует уже деление суток на 24 часа, но вследствие несовершенства тогдашних солнечных и водяных часов это деление было ещё грубым. В III в. до н. э. греческое деление суток перешло в Рим. За начало суток в астрономии со времени Птолемея считается полдень; в гражданской жизни разные народы за начало суток принимали другие моменты.

Названия дней недели во многих языках производятся от названий Солнце, Луна, Венера, Маркс, Меркурий, Юпитер и Сатурн. Это привело многих авторов к мысли о вавилонском происхождении семидневной недели. Однако в вавилонских памятниках нет упоминаний о ней. Специалисты по истории календаря (Гинцель) относят возникновение семидневной недели к III в. н. э.

Римляне имели сначала восьмидневный цикл (каждый восьмой день считался базарным днём). С признанием христианства государственной религией введена семидневная неделя с днём отдыха в воскресенье (около 325 г. н. э.).

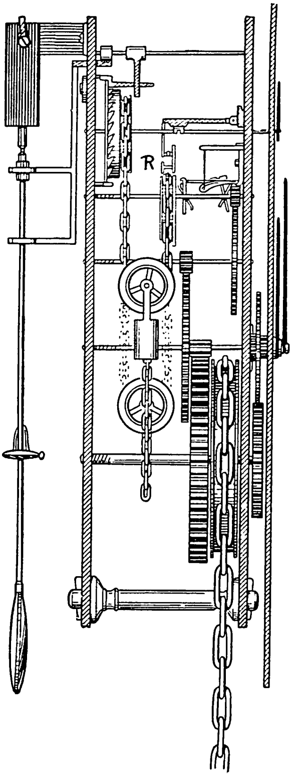


Рис. 86. Механизм часов Гюйгенса.

Год сначала почти всеми народами определялся по движению Луны. Так поступали в особенности южные народы, которые и в настоящее время пользуются лунным годом для исчисления времени. Одним из объяснений этого явления приводится то, что переходы в южных пустынях совершаются из-за дневной жары главным образом ночью при луне и время измеряется, естественно, по луне.

Вследствие того что отношение продолжительности обращения Земли около оси (сутки) к продолжительности оборота Земли около Солнца (год) и продолжительности оборота Луны около Земли (месяц) не выражается целыми числами, возникли большие трудности в исчислении времени. В мерах времени, основные единицы которых год, месяц, сутки, в отличие от мер других величин, единичные отношения мер не только не являются круглыми числами (10, 60,100), а являются числами не целыми. Это обстоятельство усложняет вопросы и задачи измерения времени.

Промежуток времени между двумя полнолуниями (так называемый синодический месяц) равен 29,53059 суток. Долго за месяц принимали 29,5 суток, считая месяцы попеременно по 30 и 29 суток. У греков такой способ счёта месяцев существует уже со времени Солона (около 594 г. до н. э.). 12 таких месяцев составляют 354 суток, в то время как тропический год (период между двумя возвращениями солнца в одну и ту же точку небесного свода) содержит 365,2422 суток. Отсюда возникает весьма заметное передвижение календарных времён года, но несмотря на это многие народы, в первую очередь арабские, сохраняют до сих пор это лунное летосчисление с подвижным началом года.

Вавилоняне и греки исправляли расхождение лунного и гражданского счёта времени соответственным распределением полных и неполных месяцев. Астроном Метон установил в 433 г. до н. э. цикл из 19 лет, который должен содержать 235 месяцев — 125 полных и 110 неполных; 12 из этих годов имели 12 месяцев, 7 лет по 13 месяцев. Метоновское летосчисление было весьма хорошим приближением к точному и основывалось на вавилонских наблюдениях.

Египтяне в очень раннюю эпоху ввели у себя солнечный год, установив в году 12 месяцев, по 30 дней каждый, и 5 добавочных дней. 7 марта 238 г. до н. э., по-видимому, при участии Эратосфена (276—194), был введён календарь, по которому каждый четвёртый год получал дополнительный день, однако это важное установление вскоре уступило место старому, примитивному.

Римский календарь, очень несовершенный долгое время, при Юлии Цезаре в 47 г. до н. э. был, наконец, упорядочен, по плану египетского астронома Созигена, в точном соответствии с забытым в самом Египте летосчислением времён Эратосфена. Это и есть юлианское летосчисление, по которому каждый четвёртый год имеет добавочный день в феврале (так называемый **високосный** год). Этот календарь был принят христианской церковью и держался у всех европейских народов до конца XVI в. Високосными годами считались все те, числовые обозначения которых делятся на 4 без остатка. Средний гражданский год, таким образом, имеет продолжительность 365,25 суток вместо 365,2422, и счёт гражданского времени ежегодно отстаёт от астрономического счёта. Вследствие этого начала времён года запаздывают в каждые 400 лет истинного времени приблизительно на 3 суток. Это отмечал, между прочим, Данте устами одного из героев своего «Рая» (песнь VIII), говорящего о наступлении времени, когда «январь выйдет из зимы из-за той сотой доли дня,

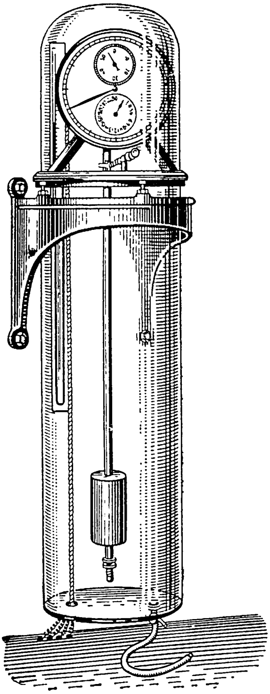


Рис. 87. Астрономические маятниковые часы.

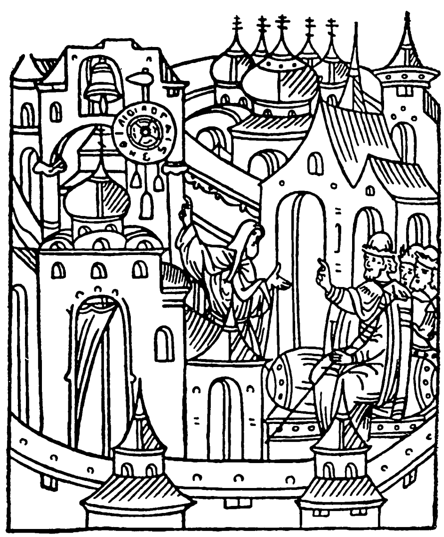


Рис. 88. Часы с колокольным боем, установленные в Москве в 1654 г.

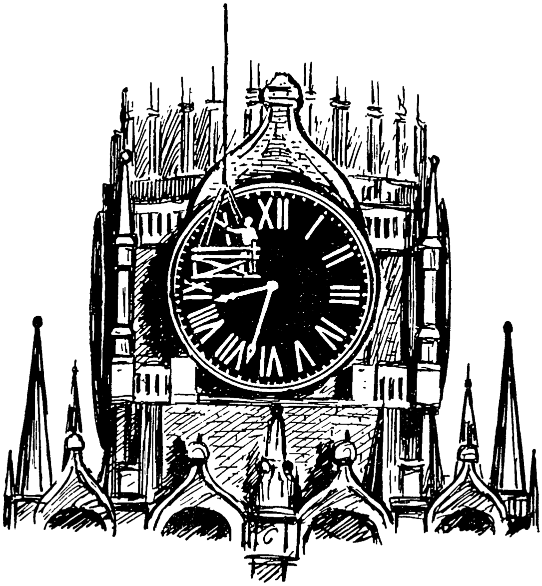


Рис. 89. Кремлёвские башенные часы. (Фигура рабочего наглядно показывает размеры часов.)

которой там внизу (на Земле) пренебрегают». К XVI в. отставание юлианского летосчисления достигло 10 суток. Занимались вопросом исправления календаря: Николай Кузанский, Региомонтан, Стифель, Коперник, который оправдывал перед церковными властями свои астрономические занятия необходимостью разработать точную теорию движения небесных тел для календарной реформы.

Окончательная реформа была подготовлена математиками Клавием и Лилием. Буллой (декретом) папы Григория XIII от 1 марта 1582 г. было установлено для католических стран новое летосчисление (**григорианское**) [1], и накопившаяся к тому времени ошибка в 10 суток была исправлена тем, что после 4 октября сразу считали 15 октября. Чтобы в дальнейшем по-прежнему не накапливалась ошибка, каждые 400 лет гражданского летосчисления были сокращены на 3 суток. Достигается это тем, что годы, числовое обозначение которых является полными сотнями, по новому календарю стали считаться високосными лишь в том случае, если это число сотен делится на 4 (по юлианскому календарю все они были високосными).

[1] В некатолических странах введение нового календаря, считавшегося католическим, вызывало бунты, сопровождавшиеся казнями, например в Риге.

Таким образом, из 400 последовательных лет три високосных года юлианского календаря становятся простыми, и отставание гражданского календаря от солнечного уменьшается на трое суток за 400 лет. Годы 1600, 1700, 1800 и 1900 по юлианскому календарю все были високосными; по григорианскому календарю из них високосным остался только 1600-й.

Как ни прост этот счёт годов, однако человек и тут делал ошибки. Американские моряки в течение многих десятилетий пользовались «Практическим навигатором» Моора, в котором 1800 г. отнесён к високосным, что, по указанию морской хроники, повлекло за собой несколько катастроф на море.

Средний гражданский год по новому календарю имеет продолжительность в 365,2425 суток. Это всё же отличается от продолжительности тропического года, но разница составит одни сутки только в 3333 года.

В России за введение нового календаря высказывались многие, в особенности Д. И. Менделеев, но осуществлено это было только после Великой Октябрьской социалистической революции с 1 февраля 1918 г. При переводе дат старого календаря в даты нового надо помнить, что:

от 5 октября 1582 г. до конца февраля 1700 г. надо прибавлять 10 дней.
от 19 февраля 1700 г. до конца февраля 1800 г. » 11 »
от 18 февраля 1800 г. до конца февраля 1900 г. » 12 »
с 17 февраля 1900 г. до конца февраля 2100 г. надо прибавлять 13 дней.

Историк и астроном Скалигер около 1600 г. перенумеровал дни, начиная с начала 4713 г. до н. э. Каждый день юлианского календаря имеет свой порядковый нумер. Продолжительность промежутка времени определяется в сутках разностью нумеров Скалигера. Если начало рассматриваемого промежутка было до новой эры, то отнятием одного года от разности нумеров годов конца и начала промежутка (Акад. А. Н. Крылов, Мысли о

Рис. 90. Медаль в память григорианской реформы календаря. Портрет Григория XIII, на оборотной стороне знак весеннего равноденствия.

Алексей Николаевич Крылов.

преподавании механики, стр. 65; Д. Я. Мартынов, Века и мгновения, М., 1961).

Существовали и предлагались в разное время различные календари, которые имеют чисто арифметическую основу.

Принимая астрономический год с точностью до 0,0001 суток равные 356,2422 суток и включая в x астрономических лет y високосных (по 366 суток) и, следовательно, $(x-y)$ простых лет (по 365 суток), имеем уравнение:

$$366y + 365(x-y) = 365{,}2422\,x,$$

$$\text{откуда } \frac{y}{x} = \frac{1211}{5000},$$

т. е. среди 5000 тропических годов должно быть 1211 високосных. Это отношение заменяется приближённым, возможно простым и возможно точным, при помощи цепных дробей. Приближениями будут:

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{7}{29}, \quad \frac{8}{33}, \quad \frac{31}{128}.$$

Первое приближение $\frac{1}{4}$ даёт юлианский календарь, в котором на каждые 4 года приходится один високосный. Средняя продолжительность гражданского года по этому календарю 365,25 суток вместо 365,2422 суток. Гражданский счёт времени отстаёт от астрономического в 128 лет на одни сутки, что было отмечено Никейским собором (325) и греческим монахом Исааком Аргирусом [73].

Второе приближение $\frac{7}{29}$ даёт календарь, в котором на каждые 29 лет падают 7 високосных лет. Средняя продолжительность суток при таком счёте времени $365\frac{7}{29}$ суток $\approx 365{,}24138$ суток; при этом календаре гражданский счёт времени опередил бы астрономический. Ошибка составит полные сутки в 1220 лет (приблизительно). Такой календарь, по-видимому, нигде не был осуществлён.

Третьему приближению $\frac{8}{33}$ соответствует календарь, в котором на каждые 33 года приходится 8 високосных лет. В нём ошибка в одни сутки накопляется только за 4400 лет (приблизительно). Такой календарь был введён в 1079 г. в Иране по плану поэта, математика и философа Омара Хайяма. По точности этому календарю соответствовал календарь Французской революции.

Четвёртое приближение $\frac{31}{128}$ даёт календарь, в котором на каждые 128 лет приходится 31 високосный год. При таком исчислении ошибка в одни сутки образуется лишь за 100 000 лет. Такой календарь был предложен во второй половине прошлого века профессором Дерптского (Юрьевского — ныне Тартусского) университета Медлером[1] и специально приспособлен для введения в России.

Иоганн Генрих Медлер.

К введению этого календаря в России склонялись многие, но он не был введён, хотя православная церковь скорее соглашалась на принятие такого математически обоснованного нового календаря, чем на принятие григорианского, введённого католической церковью и не имеющего под собой чёткой математической базы. Основы календаря, совпадающего с календарём Медлера, излагались профессорами «естественнонаучной апологетики» в русских духовных академиях. Необходимость преобразования календаря на математической основе обосновывал впервые учитель Н. И. Лобачевского — профессор астрономии Казанского университета И. Литров в начале XIX в. [74].

Длительные работы многих учёных подтвердили, что совершенно точное совпадение гражданского летосчисления с астрономическим неосуществимо, так как продолжительность тропического года не является абсолютно постоянной. Это констатировал «житель Сириуса» в романе Вольтера «Микромегас», заметивший, что Земля обращается «весьма непорядочно». Прогрессивный русский сатирик В. С. Курочкин писал:

Вкруг огня, как бабочка порхая,
С бледнолицей спутницей-луной
Шар земной летит, не признавая
Никаких делений над собой.

Начало года в древнем Риме в 153 г. до н. э. было перенесено с марта на 1 января.

В России счёт годов до начала XVIII в., как и в разных других странах, вёлся от некоторого условно выбранного момента,

[1] Ещё более точный календарь, чем медлеровский, был разработан декабристом Штейнгейлем.

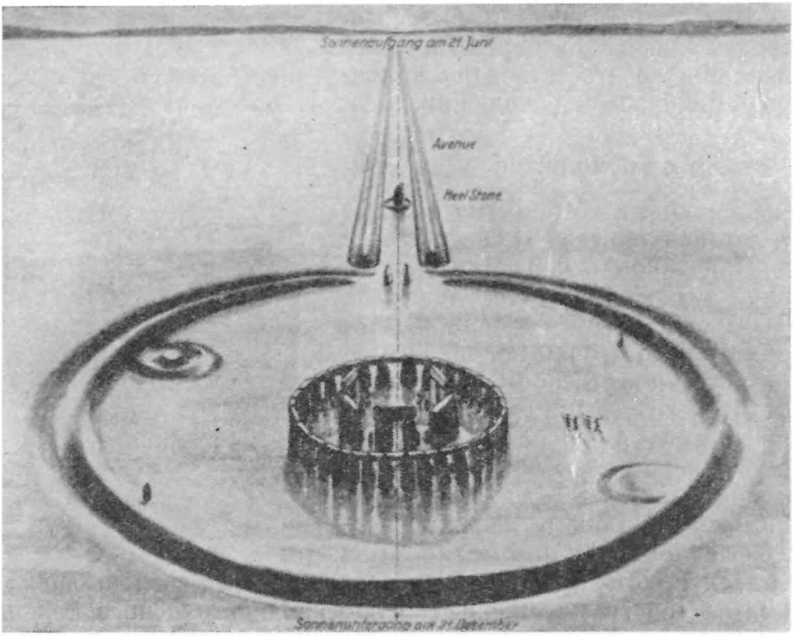


Рис. 91. Древнейший «календарь» в Европе (Англия) [1].

который в христианских странах назывался «сотворением мира». В западной христианской церкви в начале VI в. был принят за начало счёта (так называемую эру) 5508 г. по прежнему летосчислению. Этот год является эрой нашего нынешнего летосчисления.

Началом года в России было 1 сентября. Пётр I перенёс начало года, начиная с 1700 г., на 1 января «лучшего ради согласия с народами европейскими в контрактах и трактатах». Эрой римского летосчисления считался год основания Рима. Началом нашей эры считается 753 г. с основания Рима.

Мы считаем годы после нашей эры I, II, III и т. д., а годы до нашей эры обратным счётом ...III, II, I до нашей эры. Вычисляя продолжительность некоторого периода, который начался, скажем, в сотом году до нашей эры и кончился в сотом году нашей эры, обычно получают $100+100=200$ (лет). Здесь делается явная арифметическая ошибка, которая очевидна на простейшем примере. Сколько времени прошло от середины первого года до нашей эры до середины первого года нашей эры? Если считать

[1] Он определяет начало года — день летнего солнцестояния, 22 июня: в этот день первый луч восходящего Солнца падает по каменной аллее на центральный камень в ограде. «Календарь» построен в каменном веке, около 2000 лет до начала нашего летосчисления.

так, как это обычно делали авторы, то ответом будет $(1+1=)2$ года. Между тем от середины первого года до нашей эры до середины первого года нашей эры прошёл только один год. Ошибка происходит от того, что при счёте годов нет нулевого года, который должен быть, соответствуя нулевому интервалу, на числовой оси. Разные юбилейные даты, которые отмечались за последние годы всем миром (2000-летия Горация, Вергилия и др.), были не 2000-летними, а 1999-летними юбилеями [75].

Астрономическое летосчисление исправляет ошибку историков, считая «минус первый» год историков нулевым годом.

5. КАЛЕНДАРНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ

Дадим объяснения происхождения некоторых слов, употребляющихся нами в связи со счётом времени.

Термин **«календарь»** происходит от латинского глагола calare — выкликать (специальные чиновники кликами объявляли появление серпа луны в начале месяца).

Термин **«високосный»** происходит от латинского bisextilis — второй шестой (день), так как в феврале добавляли второй шестой от конца месяца день в те годы, когда нужно было вставить лишний день для исправления счёта дней.

Происхождение терминов **«минута», «секунда», «терция»** (minutia — доля, secunda — вторая, tertia — третья) было объяснено в главе о дробях.

Название месяцев и их различная продолжительность ведут своё начало из Рима. Там сначала первым месяцем считался март, название которого происходит от имени бога войны Марса. Некоторые другие месяцы получили названия, произведённые от имени богов (январь от Януса), большинство же месяцев называлось порядковыми числительными: пятый (наш июль), шестой (наш август). Наши названия месяцев сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь происходят от латинских числительных: septem — 7, octo — 8, novem — 9, decem — 10. Нумера этих месяцев становятся понятными, если учесть, что первым месяцем у римлян был март, а последним февраль, почему исправление счёта дней производилось в феврале.

Льстивые царедворцы присвоили пятому и шестому месяцам имена диктатора Юлия Цезаря и императора Августа. Июль имел 31 день, август 30 дней. Чтобы не обидеть императора Августа, месяц его имени был удлинён до 31 дня, а был взят этот день от последнего месяца февраля, у которого осталось вместо прежних 29 дней 28. Так же были позднее переименованы апрель и май в честь императоров Нерона и Клавдия, но названия эти не удержались. Император Домициан, не рассчитывая на усердие сената, сам, с угрозой смертной казни за неисполнение, приказал «на вечные времена» назвать октябрь его именем, но и это наименование было скоро оставлено.

Старинные славяно-русские названия месяцев, сохранившиеся частично в современном украинском и белорусском языках, произведены от времени хозяйственных работ и сезонных явлений природы.

Сутки. Греческое название суток noctemere — в буквальном переводе — нощеденствие; этот термин употребляли старые русские авторы. В материнском языке автора настоящей книги — эстонском — нет другого термина для обозначения суток, как ööpäev — нощеденствие. Слово «сутки» по указанию языковедов происходит от корня «ткать».

Каникулы — «собачьи дни», от латинского canis — собака «Большой собакой» называлась звезда Сириус, с первого появления которой в лучах восходящего солнца начинался разлив реки Нила и новый земледельческий год египтян. Отсюда у римлян предания о легендарной собаке Сириус, которой приносили в жертву рыжую собаку. Гражданский год по египетскому календарю был на $\frac{1}{4}$ суток длиннее астрономического, почему календарный счёт отставал от течения времени. Это отставание за $(365 \times 4 =)$ 1460 лет составляло полный год. Период в 1460 лет, через который вновь восстанавливалось совпадение начала календарного года с астрономическим, назывался **каникулярным периодом, начало его** — годом пса.

Неделя. У славянских народов неделей назывался день отдыха, переименованный духовенством в воскресенье. За неделей — днём отдыха — следовал **понедельник** — день после недели, затем **вторник** — второй день после недели. Четвёртый и пятый дни после недели получили названия **четверг** и **пятница,** а день в середине между первыми двумя рабочими днями и последними двумя был назван **средой. «Суббота»** — слово еврейско-библейское; название это последнему дню недели было дано церковью.

Слово «неделя» происходит от «не делать», «не работать» (Даль, Словарь живого великорусского языка). Приводя пример: «Мели Емеля — твоя неделя», Даль объясняет: «Емеля — праздно слоняющийся, простофиля». У Б. Лавренёва («Разлом») матрос среди многих народных изречений приводит и такое: «Мели Емеля, **пока** неделя», что соответствует смыслу слова «неделя» как названию нерабочего дня. Таков смысл слова «неделя» в старых русских азбуковниках. Там внушается ученику:

> Ко учителю в день недельный приходите,
> и от снедных брашен и пития ему приносите.

Термин **«эра»** обозначает событие или момент, от которого ведётся счёт времени. Латинское aera одни производят от aes, родительный падеж aeris — медные доски, на которых записывались замечательные события; другие объясняют слово aera как словообразование из первых букв слов фразы: Ab Exordio Regni Augusto — от начала царствования Августа.

Эрой мусульманского летосчисления, называемой **хиджра,** является 16 июля 622 г., день бегства Мухаммеда из Мекки в Медину. Перевод дат европейского летосчисления в мусульманское без таблиц невозможно, так как последнее является лунным. Таблицы имеются на русском языке: «Синхронистические таблицы для перевода исторических дат по хиджре на европейское летосчисление», Л., 1940 (пояснение к таблице акад. И. А. Орбели).

6. КАЛЕНДАРЬ ФРАНЦУЗСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

24 ноября 1793 г. Учредительное собрание Франции издало декрет о введении нового календаря. Эрой был признан день рождения Республики 22 сентября 1792 г. Год делился на 12 месяцев, по 30 дней в каждом, месяц на 3 декады (вместо недель). В конце года добавлялось 5 дней в простом и 6 в високосном году, называвшихся дополнительными днями. Названия дней в декадах были образованы от французских слов «первый», «второй», «третий» и т. д. Десятый день в декаде считался днём отдыха.

Месяцам также были даны новые названия, чтобы республиканский календарь не имел сходства с прежним, религиозным календарём. Названия месяцев были образованы так же, как в старом славяно-русском времясчислении, от сезонных явлений природы и хозяйственных работ. Первым временем года считалась осень. Названия осенних месяцев были составлены с окончанием «мер», названия зимних месяцев с окончанием «оз», весенних — на «аль», летних — на «ор». Получилась, таким образом, система названия [76]:

Осенние месяцы:

вандемьер	—месяц	сбора винограда,	наши	сентябрь	—октябрь
брюмер	—месяц	туманов,	»	октябрь	—ноябрь
фример	—месяц	заморозков,	»	ноябрь	—декабрь

Зимние месяцы:

нивоз	—месяц	снегопадов,	наши	декабрь	—январь
плювиоз	—месяц	дождей,	»	январь	—февраль
вентоз	—месяц	ветров	»	февраль	—март

Весенние месяцы:

жерминаль	—месяц	прорастания,	наши	март	—апрель
флюреаль	—месяц	цветения,	»	апрель	—май
прериаль	—месяц	лугокошения,	»	май	—июнь

Летние месяцы:

мессидор	—месяц жатвы,	наши	июнь	—июль
термидор	—месяц жары,	»	июль	—август
фрюктидор	—месяц сбора плодов,	»	август	—сентябрь

Календарь этот, значительно более точный, чем юлианский и даже григорианский, по точности совпадал с календарём Омара Хайяма. В составлении его участвовал знаменитый астроном и математик Лаплас, который, конечно, знал о существовавшем в XI в. календаре Омара Хайяма (о чём встречается упоминание в письмах Лапласа). Революционный календарь был заменён прежним 31 декабря 1805 г. (10 нивозы XIV г.) при императоре Наполеоне декретом, который был подсказан Наполеону составителем революционного календаря Лапласом, в своё время выступавшим за «изжитие старого стиля рабов».

Борьба против революционного календаря велась вне границ Франции уже ранее. Уже в конце XVIII в. в Россию не допускались книги, на которых стоял год издания, соответствующий революционному календарю, независимо от содержания.

Фактическим составителем революционного календаря был математик Ромм (1750—1795 гг.), проживавший до французской революции ряд лет в России, где среди его близких знакомых были Эйлер, Паллас, Державин, Богданович, минералог Разумовский, зодчий Воронихин, академики Фус, Эпинус и др. Во французской революции он принадлежал к крайне левому крылу. «Осуждённый за то, что стоял на стороне голодного народа, он избегнул казни, проткнув себе сердце карманным ножом». (Мишле, История французской революции, т. VI, стр. 51).

Первоначальная терминология нового календаря была очень многословна. 28 октября 1793 г. по новому календарю называлось: «седьмой день первой декады второго месяца (брюмера) II года Республики единой и неделимой». Это неудобство было устранено приведённой выше системой названий, составленной поэтом Фабром Д'Эглантином. В своём представлении Конвенту новой календарной номенклатуры он писал:

«Изгнав из календаря канонизированную толпу (святых), мы желали ввести туда предметы, достойные если не **культа,** то во всяком случае **культуры,** гораздо более дорогие для разума, чем осчастливливающие суеверных скелеты, извлечённые из катакомб Рима» (святые).

В книгах по истории французской революции обычно даты даются по революционному календарю, а если иногда даются переводы их по употребительному, то не всегда без ошибок [77].

Так как на русском языке неизвестно сопоставление дат революционного календаря с датами григорианского, то мы даём здесь таблицу, которая решает этот вопрос (стр. 300—301).

7. ВСЕМИРНЫЙ КАЛЕНДАРЬ

В настоящее время разработан новый всемирный календарь, в котором все кварталы (четверти года) имеют одинаковое число дней (91) и совершенно одинаковый состав (первый месяц **каждого** квартала начинается с воскресенья и имеет 31 день, второй месяц, в 30 дней, начинается со среды, третий месяц, в 30 дней, с пятницы). При семидневной неделе все месяцы имеют одинаковое число рабочих дней. День нового года предполагается оставить без числа; в високосном году без числа остаётся ещё один день в середине года (последний день июня). Такое деление года не только уравнило бы месяцы и упростило бы счёт дней, но и превратило бы наши календари, на которые уходит масса бумаги и труда, в небольшую табличку, которая являлась бы «вечным календарём». Происходит оживлённый обмен мнениями по поводу введения этого календаря. Общество реформы календаря ведёт в этом направлении значительную агитационную работу.

Всемирный календарь на вечные времена представлен на таблице стр. 302, из которой читатель убедится в крайней простоте построения и усмотрит, вероятно, без объяснений, те преимущества, которые выдвигаются его сторонниками.

Вечный табель-календарь можно изобразить сжато так:

Первые месяцы кварталов	Вторые месяцы кварталов	Третьи месяцы кварталов
Январь I Апрель IV Июль VII Октябрь X	Февраль II Май V Август VIII Ноябрь XI	Март III Июнь VI Сентябрь IX Декабрь XII
В. Пн. Вт. Ср. Ч. Пт. Сб.	В. Пн. Вт. Ср. Ч. Пт. Сб.	В. Пн. Вт. Ср. Ч. Пн. Сб.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 — — — —	— — — 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 — —	— — — — — 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 (в июне високосного года и в декабре день вне календаря).

Автором всемирного календаря является некий Армелин.

Предложения об измерении времени, о часах, календаре и хронологии затрагивают ещё очень много вопросов, которых в настоящей книге мы не рассматриваем [78].

Годы револ. календаря / Месяцы револ. календаря	II	III	IV	V	VI	VII
	1793	1794	1795	1796	1797	1798
1 вандемьер	22 сент.	22.IX	23.IX	22.IX	22.IX	22.IX
10 »	1 окт.	1.X	2.X	1.X	1.X	1.X
20 »	11 »	11.X	12.X	11.X	11.X	11.X
1 брюмер	22 »	22.X	23.X	22 X	22 X	22.X
15 »	5 ноября	5.XI	6.XI	5.XI	5.XI	5.XI
1 фример	21 »	21.XI	22.XI	21.XI	21.XI	21.XI
15 »	5 дек.	5.XII	6.XII	5.XII	5.XII	5.XII
1 нивоз	21 »	21.XII	22.XII	21.XII	21.XII	21.XII
	1794	1795	1796	1797	1798	1799
12 »	1 янв.	1.I	2.I	1.I	1.I	1.I
20 »	9 »	9.I	10.I	9.I	9.I	9.I
1 плювиоз	20 »	20.I	21.I	20.I	20.I	20.I
15 »	3 февр.	3.II	4.II	3.II	3.II	3.II
1 вентоз	19 »	19.II	20.II	19.II	19.II	19.II
15 »	5 марта	5.III	5.III	5.III	5.III	5.III
1 жерминаль	21 »	21.III	21.III	21.III	21.III	21.III
15 »	4 апр.	4.IV	4.IV	4.IV	4.IV	4.IV
1 флореаль	20 »	20.IV	20.IV	20.IV	20.IV	20.IV
15 »	4 мая	4.V	4.V	4.V	4.V	4.V
1 прериаль	20 »	20.V	20.V	20.V	20.V	20.V
15 »	3 июня	3.VI	3.VI	3.VI	3.VI	3.VI
1 мессидор	19 »	19.VI	19.VI	19.VI	19.VI	19.VI
15 »	3 июля	3.VII	3.VII	3.VII	3.VII	3.VII
1 термидор	19 »	19.VII	19.VII	19.VII	19.VII	19.VII
15 »	2 авг.	2.VIII	2.VIII	2.VIII	2.VIII	2.VIII
1 фрюктидор	18 »	18.VIII	18.VIII	18.VIII	18.VIII	18.VIII
15 »	1 сент.	1.IX	1.IX	1.IX	1.IX	1 IX
V дополнит. день	21 »	21.IX	21.IX	21.IX	21.IX	21.IX
VI дополнит. »		22.IX				22.IX

И ГРИГОРИАНСКОГО КАЛЕНДАРЕЙ

Годы револ. календаря / Месяцы револ. календаря	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
	1799	**1800**	**1801**	**1802**	**1803**	**1804**	**1805**
1 вандемьер	23.IX	23.IX	23.IX	23.IX	24.IX	23.IX	23.IX
20 »	2.X	2.X	2.X	2.X	3.X	2.X	2.X
10 »	12.X	12.X	12.X	12.X	13.X	12.X	12.X
1 брюмер	23.X	23.X	23.X	23.X	24.X	23.X	23.X
15 »	6.XI	6.XI	6.XI	6.XI	7.XI	6.XI	6.XI
1 фример	22.XI	22.XI	22.XI	22.XI	23.XI	22.XI	22.XI
15 »	6.XII	6.XII	6.XII	6.XII	7.XII	6.XII	6.XII
1 нивоз	22.XII	22.XII	22.XII	22.XII	23.XII	22.XII	22.XII
	1800	**1801**	**1802**	**1803**	**1804**	**1805**	
12 »	2.I	2.I	2.I	2.I	3.I	2.I	
20 »	10.I	10.I	10.I	10.I	11.I	10.I	
1 плювиоз	21.I	21.I	21.I	21.I	22.I	21.I	
15 »	4.II	4.II	4.II	4.II	5.II	4.II	
1 вентоз	20.II	20.II	20.II	20.II	21.II	20.II	
15 »	6.III	6.III	6.III	6.III	6.III	6.III	
1 жерминаль	22.III	22.III	22.III	22.III	22.III	22.III	
15 »	5.IV	5.IV	5.IV	5.IV	5.IV	5.IV	
1 флореаль	21.IV	21.IV	21.IV	21.IV	21.IV	21.IV	
15 »	5.V	5.V	5.V	5.V	5.V	5.V	
1 прериаль	21.V	21.V	21.V	21.V	21.V	21.V	
15 »	4.VI	4.VI	4.VI	4.VI	4.VI	4.VI	
1 мессидор	20.VI	20.VI	20.VI	20.VI	20.VI	20.VI	
15 »	4.VII	4.VII	4.VII	4.VII	4.VII	4.VII	
1 термидор	20.VII	20.VII	20.VII	20.VII	20.VII	20.VII	
15 »	3.VIII	3.VIII	3.VIII	3.VIII	3.VIII	3.VIII	
1 фрюктидор	19.VIII	19.VIII	19.VIII	19.VIII	19.VIII	19.VIII	
15 »	2.IX	2.IX	2.IX	2.IX	2.IX	2.IX	
V дополнит. день	22.IX	22.IX	22.IX	22.IX	22.IX	22.IX	
VI дополнит. »				23.IX			

ВСЕМИРНЫЙ КАЛЕНДАРЬ: ВСЕ ГОДЫ ОДИНАКОВЫ, ВСЕ КВАРТАЛЫ РАВНЫ

Первый квартал

Январь

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	—	—	—	—

Февраль

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	—	—

Март

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пн.	Сб.
—	—	—	—	—	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Второй квартал

Апрель

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	—	—	—	—

Май

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	—	—

Июнь

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	—	—	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Третий квартал

Июль

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	—	—	—	—

Август

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	—	—

Сентябрь

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	—	—	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Четвёртый квартал

Октябрь

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	—	—	—	—

Ноябрь

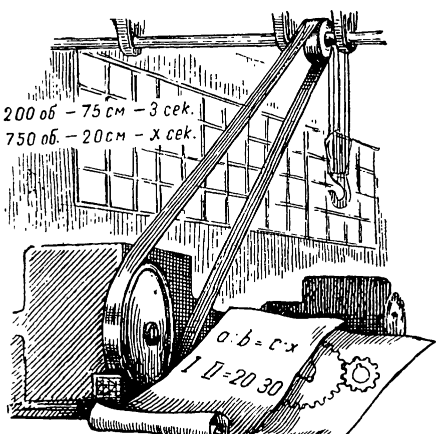
В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	—	—

Декабрь

В.	Пн.	Вт.	Ср.	Ч.	Пт.	Сб.
—	—	—	—	—	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

День конца года (31 декабря) вставляется после 30 декабря каждого года.
День високосного года (31 июня) вставляется после 30 июня високосного года.

ПРАКТИЧЕСКИЕ „ПРАВИЛА" В УЧЕБНИКАХ АРИФМЕТИКИ



В учебниках арифметики средних веков и последующих можно встретить много различных правил для решения задач того или иного частного типа. Говорится о 26 таких правилах, обычных для учебника арифметики, но в дошедших до нас старых учебниках можно найти их больше.

Рассмотрим для примера не очень старый учебник «Арифметический путеводитель или на эстляндский и лифляндский манер основательно изложенный первый ревельский учебник счёта Иоганна Даниила Интельмана, городского (ревельского-таллинского) бухгалтера и старающегося члена социетета любителей и ревнителей искусства счёта» [1].

Книга издана в 1736 г. в Ревеле (Таллине), напечатана в Галле. В ней, кроме понятных старшему поколению правил, встречаем: правило слепое или девичье, правило монетчиков, маклерское правило (Corritagio), провизионное правило, аварийное правило, товарообменное правило и много других, всего более тридцати разных правил.

Вот другая книга [80]: «Руководство к арифметике, в котором нужнейшие и полезнейшие части оной в ясных описаниях, в полезнейших правилах и с достаточно многочисленными примерами для общей пользы в житье-бытье, особенно же на пользу дорогого школьного юношества, собрал и изложил Михаил Вебер, коллега и кантор в рыцарской домской школе в Ревеле» (Ревель, 1737). В этой книге, кроме указанных выше правил, находим ещё: паритетное правило, аукционное правило, двойное скидочное правило и др. Эти правила носят разные чужеземные названия, которые одни могли привести в смущение учащегося.

При знакомстве с такими учебниками становятся понятными слова старой русской рукописи конца XVII или начала XVIII в. (рукописный отдел библиотеки имени В. И. Ленина), в которой после правил «о радиксе квадрата или о корне четвероякoм» сказано: «Есть и иные многие регулы в сей науке, которых употребляют больше на Москве (иноземные учителя), чая себя к повы-

[1] Так называлось одно из старейших математических обществ в мире — гамбургское, основанное в XVII в. [79].

шению великой своей науки, но мы всё оставляем для того, что во тех регулах никакие помощи ни в чем не сыщет никто, и все те бездельные регулы... родятся из сих же настоящих фундаментов, и кто хорошо вы́знает всех регул фундаменты, может сам тех безделиц делать сколько похочет. Только мы своим учением не позволяем. Лучше голову ломать о деле, неже о безделье».

Рассмотрим в дальнейшем те из правил прежних учебников арифметики, которые или сохранились в учебниках нашего времени или представляют интерес с точки зрения истории школьной математики.

1. ПРОПОРЦИИ

Основой всех практических правил арифметики с теоретической точки зрения является понятие о пропорциональности величин и учение о пропорциях. В ранние эпохи развития математики, в частности у греков, пропорции играли тем большую роль, что они являлись средством для решения тех задач, которые мы в настоящее время решаем при помощи уравнений первой степени. Кроме того, у греков дробное число рассматривалось, как отношение двух чисел, а действия над дробями — как действия над отношениями, и приводили к рассмотрению пропорций, что ещё более увеличило значение учения о пропорциях. Этим объясняется то большое место, которое уделяется учению о пропорциях как у Евклида, так и у средневековых математиков арабоязычных и европейцев. Даже после того, когда символический язык получил широкое применение в уравнениях, числовые результаты получались при помощи пропорций. Так, например, Карстенс (1768) отводит в своём руководстве учению о пропорциях 70 страниц, в то время как в современных руководствах то же учение излагается на 3—4 страницах.

Какое значение авторы старого времени придавали пропорциям, видно из слов Г. Витали («математический лексикон», 1668): «Пропорция является основанием, на котором строится вся математика, а также целью, к которой стремятся все её предложения». Тибо, профессор в Геттингене, славившийся как преподаватель, в своём выдающемся руководстве 1801 г. исключает пропорции из курса, но во втором издании (1809) помещает очерк о них в приложении, объясняя своё поведение тем, что терминология и приёмы пропорций настолько вкоренились, что по крайней мере исторические сведения о них являются необходимыми.

Применение понятий о пропорциональных величинах находим уже в египетских папирусах — Московском и Райнда. В первом из них имеется также специальный иератический знак для понятия «отношение» (при рассмотрении отношения большего катета к меньшему в прямоугольном треугольнике, задача № 7 в издании В. В. Струве). У вавилонян применение пропорций имело гораздо более широкое распространение, и, по-видимому, отсюда идут корни греческого учения о пропорциях. У вавилонян имелся в текстах часто встречающийся специальный термин для отношений.

Пифагорейская школа пользовалась тремя пропорциями, называвшимися в греческой математике **аналогиями**: арифметической $a-b=c-d$, геометрической $a:b=c:d$ и гармонической $a:c=(a-b):(b-c)$. Из них пифагорейцы получали непрерывные пропорции $a-b=b-c$ и $a:b=b:c$ и арифметическую среднюю $b=\frac{a+c}{2}$, геометрическую среднюю $b=\sqrt{ac}$ и гармоническую среднюю $b=\frac{2ac}{a+c}$. Уже Евклид употребляет термин, соответствующий нашему термину «пропорционально», Папп — термин «третья пропорциональная». Платон и Аристотель употребляют термины «арифметическая» и «геометрическая» пропорции (аналогии), но в употребление входят они только у Никомаха. Термин «гармоническая пропорция», по Ямблиху, был введён пифагорейцами, по-видимому, в связи с теорией музыки. Другого мнения держится Вилейтнер («Хрестоматия по истории математики», 1, 22) [81].

Пифагорейцы знали соотношение $a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b$, т. е. теорему: из двух чисел a и b одно относится к их среднему арифметическому так, как их среднее гармоническое относится к другому данному числу. По свидетельству Ямблиха, эту теорему знали уже вавилоняне. Ко времени Никомаха число пропорций доходит до десяти.

Происхождение терминов «арифметическая» и «геометрическая» пропорции у Аристотеля имеет следующее объяснение. Ряд чисел (у греков целых), из которых каждое получается из предыдущего прибавлением одного и того же постоянного числа, например . . . 2, 6, 10, 14, 18, . . ., назывался прогрессией чисел. Такая зависимость между числами называлась также арифметической пропорциональностью, так как она встречалась в арифметике и касалась только вопроса, на сколько единиц одно число превышает другое. Сравнение же величин, изображаемых у греков отрезками, ставило вопрос, какую часть одна величина составляет от другой, на какую часть одна величина превышает другую. Такое сравнение было делом геометрии, поэтому соответственная прогрессия и пропорция получили название геометрических, как применяемые в геометрии.

Средняя арифметическая более чем двух величин встречается уже в египетских задачах; вполне сознательно находит её Герон.

Арифметическую пропорцию излагают подробно ещё авторы XVIII в., по-видимому, по примеру Эйлера. Лангранж в своих лекциях элементарной математики 1795 г. считает употребление термина «пропорция» здесь неудобным [82].

К концу XIX в. глава об арифметической пропорции исчезает из большинства учебников. Известный методист С. И. Шохор-Троцкий (1853—1923) считает арифметическую пропорцию совершенно ненужной, а пропорции вообще формулами, в арифметике хотя и применяемыми, но не необходимыми («Педагогическая академия в очерках и монографиях», стр. 122).

Евклид излагает в книге V «Начал» учение о геометрической пропорции для величин вообще, в книге VII — для чисел. Такой порядок изложения понятен. Вопросы о пропорциональных величинах — подобие фигур — были предметом первых исследований греческой математики. Научная арифметика греков понимала под понятием «число» только целое число. Теория пропорций, излагаемая при помощи отрезков прямых, давала возможность обойтись в теории арифметики без понятия дробного числа. Пифагорейская школа довела эту арифметику до весьма высокого совершенства. Открытие несоизмеримых величин поколебало всё построение. Оказалось, что реальная величина — диагональ квадрата — не может быть измерена стороной квадрата и выражена числом в понимании греков; отрезок и число оказались существенно различными понятиями. Стало необходимым новое обоснование учения о пропорции, чтобы охватить и случаи несоизмеримых величин. Эта задача была выполнена Евдоксом из Книда (408—355), но его теория оказалась слишком сложной, чтобы её можно было включить в первые книги «Начал». Поэтому Евклид избегает в первых четырёх книгах всякого применения пропорциональности и помещает теорию Евдокса в V книге, делая некоторые изменения в более старомодном, потому более трудном тексте Евдокса.

Евклид не упоминает других пифагорейских пропорций, кроме геометрической, называя её просто пропорцией, не употребляет и всех других технических терминов прежних авторов. Но он употребляет наши термины «предыдущий» и «последующий», «средние» и «крайние» члены. Знает он все виды производных пропорций.

Из пропорции

$$a : b = c : d$$

Евклид получает следующие:

1) $b : a = d : c$,

2) $a : c = b : d$,

3) $(a + b) : b = (c + d) : d$,

4) $(a - b) : b = (c - d) : d$,

5) $a : (a - b) = c : (c - d)$.

Он знает следующие свойства пропорций:

1) из пропорций $a:b=d:e$ и $b:c=e:f$ следует $a:c=d:f$;

2) » » $a:b=e:f$ и $b:c=d:e$ следует $a:c=d:f$;

3) » » $a_1:b_1=c:d$ и $a_2:b_2=c:d$ следует $a_1:b_1=a_2:b_2$;

4) из » $a:b=c:d=e:f$ следует $(a+c+e):(b+d+f)=$
$=a:b=c:d=e:f$;

5) из » $a:b=c:d$ следует $na:nb=c:d$;

6) из » $a:b=c:d$ и $e:b=f:d$ следует $a:e=c:f$;

7) из » $a:b=d:e$ и $b:c=f:d$ следует $a:c=f:e$.

Теорема о равенстве произведений средних и крайних членов пропорции и обратная ей у Евклида содержатся в книге VII (предложение 19), в геометрической форме — в книге VI (предложение 16).

Нахождения четвёртого члена пропорции по трём данным, вытекающего из теорем Евклида, мы, однако, у него не находим, так как в «Началах» вычисления не применяются. Папп даёт геометрическое обоснование, Иордан Неморарий числовое, а Леонардо Пизанский и последующие авторы применяют это правило при решении задач на тройное правило.

В книге VI (предложение 17) Евклид геометрически доказывает равенство квадрата среднего пропорционального двух чисел произведению их и обратную теорему. Арифметической редакции этого предложения Евклид не придаёт значения, хотя она вытекает сама собой из его теорем. Впервые ею пользуется Герон (I—II вв. н. э.). Но Евклид знает, что из пропорции $a:b=b:c$ вытекает соотношение $a:c=a^2:b^2$ и из пропорций $a:b=b:c=$ $=c:d$ соотношение $a:d=a^3:b^3$ [83]. В этих результатах кроется сведение решения задачи удвоения куба к вставке двух средних пропорциональных, что, по-видимому, было известно уже пифагорейцам. В книге VIII (предложения 11 и 12) Евклид доказывает, что между двумя квадратными числами всегда можно вставить среднее пропорциональное $a^2:ab=ab:b^2$, а между двумя кубическими числами два средних пропорциональных ($a^3:a^2b=a^2b:ab^2=ab^2:b^3$). Эти предложения имеются в диалоге «Тимей» Платона и относятся Архимедом к Гиппократу Хиосскому. В книге VI Евклида содержится предложение 27 о том, что геометрическая средняя двух неравных величин всегда меньше их арифметической средней. Обобщение этой теоремы о средних на произвольное число данных выполнил Лиувилль в 1839 г.

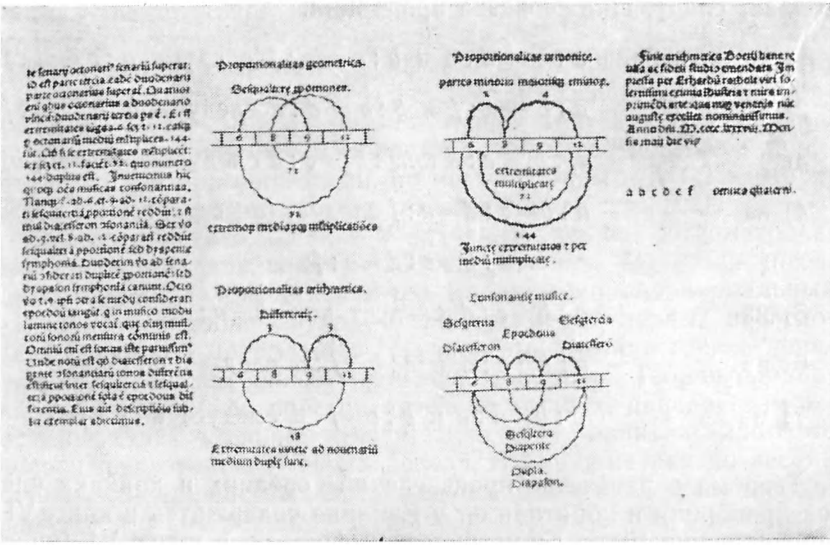


Рис. 92. Последние две страницы «Арифметики» Боэция 1488 г.

Записывали пропорцию различно. Аутрид (1631) ввёл запись $a \cdot b : : c \cdot d$, которую можно ещё в наши дни встретить у английских авторов. Наша запись геометрической пропорции идёт от Лейбница (1693), арифметической — от Вольфа (начало XVIII в.).

Термин «**логос**» для обозначения **отношения** имеется у Гиппократа (около 440 г. до н. э.), термин «**геометрическая**», «**арифметическая**» и «**гармоническая**» аналогии — у Аристотеля. «Логос» (отношение) переводится на латинский язык словом ratio; греческий термин «аналогия» Цицерон один раз перевёл редким латинским словом proportio, которое и подхватили Капелла (V в.) и Боэций (VI в.) для обозначения математического понятия.

Цамберти в XV в. впервые даёт определение: «Пропорция есть равенство отношений». Термин «непрерывная пропорция» впервые употребляет Боэций, «средняя пропорциональная» — Иордан Неморарий, «средняя арифметическая» — Кеплер, «средняя геометрическая» — Клюгель (1808).

В русских математических рукописях и в «Арифметике» Магницкого отдельной главы о пропорциях нет. Само слово «пропорция», правда, употребляется, но в житейском смысле, означая соразмерность, соотношение. Говорится, например, о «пропорции дому», «о пропорциях руд» и т. п. Ученик Магницкого Курганов (1757) вводит при решении задач на тройное правило пропорции, замечая, что этот приём есть то, «что геометры называют пропорцией». Конечно, и Магницкий знал, что такое пропорция, но не считал возможным в арифметике пользоваться этим геометрическим методом. Наше понятие «пропорциональность величин» Магницкий передаёт словами «подобие», «подобность».

2. ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО

Задачи, решаемые тройным правилом, составляли во все времена большую часть задач практической арифметики у всех народов. Величины, находящиеся в прямой или обратной пропорциональной зависимости друг от друга, человек встречает на каждом шагу и он по здравому смыслу решал задачи о значениях таких величин.

Способ решения задач на тройное правило приведением к единице известен в Индии. Вне Индии первые следы этого способа находим у Николаса Рабдаса в Смирне в его «Политической арифметике» (XIV в.). Византийские тексты XV в. называют тройное правило «пророчицей числительного искусства».

Само название «тройное правило» имеет индийское происхождение (Брамагупта). Простейшие задачи на тройное правило решают Арьябхата (VI в.) и Брамагупта (VII в.). В IX в. Махавира посвящает в своём математическом трактате целые главы разным случаям применения этого правила—к процентным, коммерческим и измерительным. Шридхара и Бхаскара (XII в.) рассматривают и сложное тройное правило. Устанавливается правило письма данных в задачах, и после этого решение задач сводится к механическим умножениям и делениям.

Арабы переняли целиком индийские правила решения задач на тройное правило, а от них они перешли в книгу Леонардо Пизанского (1228), в которой правила эти излагаются почти так же, как в учебниках нового времени. В руководствах с XV по XVIII в. тройное правило занимает центральное место, и авторы не находят достаточно громких слов для его восхваления: «это золотое правило, превосходящее все другие правила, в той же мере, как золото превосходит все остальные металлы» (Видман). Решаются задачи чисто механически, и только у Стифеля (1553) появляется понимание того, что все эти задачи могут решаться пропорциями. Якоб (1557) ссылается по этому поводу на Евклида. Только в XVIII в. появляются выводы правил.

Видман (XVI в.) различает 28 видов задач, решаемых тройным правилом, и даёт им особые названия. Тарталья (1556) делает попытку выделить основные типы этих задач, откуда возникают правила: процентов, учёта, сроков, сложных процентов, товарищества, обмена и смешения. Для практических целей многие авторы (Рудольф, Стифель, Ризе и др.) собирали разные упрощающие приёмы записи и вычислений, которые назывались «итальянской практикой» (Welsche Praktik).

Адам Ризе (Риз).

Отношение русских математических рукописей XVII в. к тройному правилу такое же восторженное, какое мы видели у зарубежных авторов. Это — «строка похвальная и лучшая из всех иных строк, которую философы зовут золотой строкой». Магницкий относится к тройному правилу так же. Он рассматривает его для трёх, пяти и семи чисел, отдельно для целых и дробных данных, отдельно для величин прямо пропорциональных и обратно пропорциональных. **Строкой** называется тройное правило у старых авторов и Магницкого потому, что для механизации вычислений данные писались в строку. Для величин прямо пропорциональных следовало писать данные в одном порядке, для величин обратно пропорциональных — в другом. Примеры:

За 2 рубля можно купить 6 предметов. Сколько их можно купить на 4 рубля?

20 рабочих могут выполнить работу в 30 дней. Сколько рабочих могут сделать ту же работу в 5 дней?

Данные этих задач нужно записать в строку так:

2—6—4,
5—20—30.

В обоих случаях нужно перемножить второе и третье числа и произведение разделить на первое. Это правило и сообщается учащемуся.

Правильность механического решения зависит целиком от правильности записи данных задачи. Поэтому Магницкий в конце раздела говорит:

А смотри всех паче
Разума (смысла) в задаче,
Потому бо знати,
Как сие писати.

Магницкий понимает, что решение таких задач есть применение свойств пропорциональности. Он начинает главу словами: «Правило тройное есть яко некий устав о трёх перечнях, их же друг к другу подобием (пропорциональностью) учит изобретати четвёртый третьему подобный». Только ученик Магницкого Курганов (1757), как указано выше, вводит решение этих задач пропорцией.

3. ЗАДАЧИ НА СМЕШЕНИЕ

Древнейшая задача этого рода имеется в папирусе Ахмеса, в которой требуется пиво разбавить водой до новой определённой крепости. Известна решённая Архимедом задача на правило смешения о короне короля Гиерона, который заподозрил мастера в замене части золота серебром. Задачу на смешение содержит одна эпиграмма Метродора (330 г. н. э.). Корона в 60 мин содержит золото, медь, олово и железо. Золото и медь вместе составляют $\frac{2}{3}$, золото и олово вместе $\frac{3}{4}$, золото и железо вместе $\frac{3}{5}$ общего веса. Определить количество каждого из металлов.

Обычные для современных сборников задачи на смешение в большом количестве имеются у индийских авторов и обычным путём через арабов переходят в книгу Леонардо Пизанского и в другие европейские руководства. Имеются они в значительном количестве и у Магницкого.

4. ЗАДАЧИ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

Эти задачи столь же древни, как задачи на смешение. В папирусе Ахмеса имеется задача: «Разделить 700 хлебов между 4 лицами, так, что первый получает $\frac{2}{3}$, второй $\frac{1}{2}$, третий $\frac{1}{3}$, четвёртый $\frac{1}{4}$ ». Очевидно, задачу надо понимать, как задачу на пропорциональное деление. У Герона (I—II вв. н. э.) имеется задача на бассейн, наполняемый через несколько труб, которая потом фигурирует у Метродора, Алкуина (735—804), у Бхаскары, арабских математиков, у Леонардо Пизанского и во всех позднейших руководствах. У армянского математика Анании Ширакаци́ (VII в.) имеются те же задачи в разных видах, взятые, по-видимому, из греческих первоисточников. Видман (1489) даёт задачу об овце, которую лев может съесть в один час, волк— в 4 часа, собака — в 6 часов. Спрашивается, в какое время все вместе могут съесть овцу? Хусвирт (1501) даёт задачу о постройке дома четырьмя рабочими, из которых первый один может построить его в один год, второй один — в 2 года и т. д. Что эти задачи имели целью главным образом развитие мышления учащихся, видно хотя бы из заглавия сборника таких задач Алкуина: Propositiones ad acuendos juvenes (Предложения для заострения (ума) молодёжи).

Римское наследственное право дало начало задаче, которой занимались юристы в течение веков и которая фигурировала в разных вариантах в руководствах арифметики до XVIII в. «Муж, умирающий до рождения ребёнка, делает следующее за-

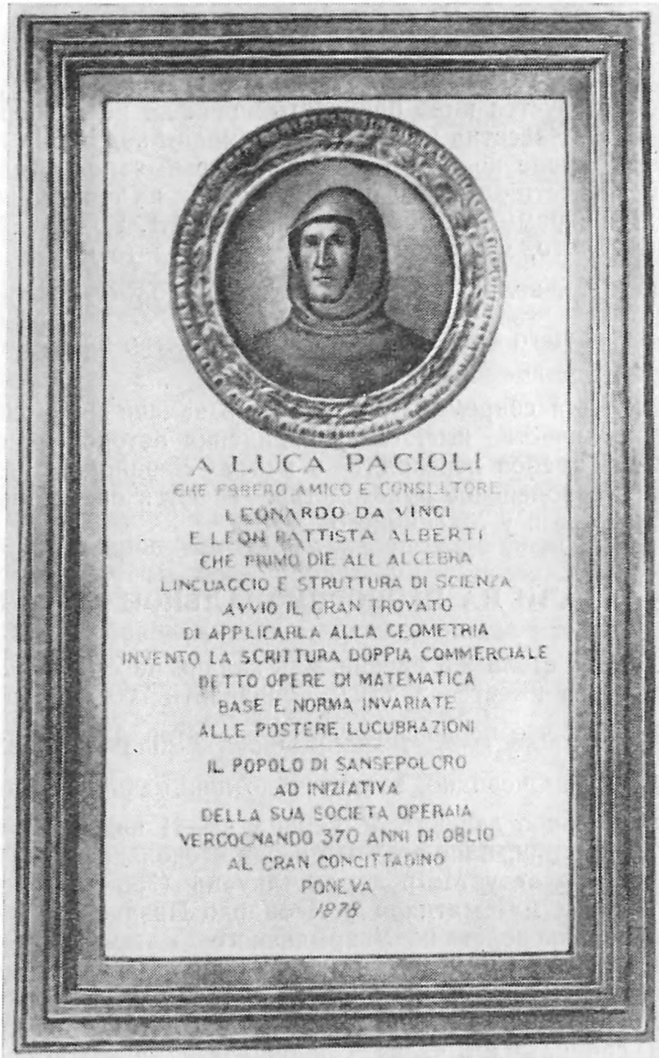


Рис. 93. Фотоснимок с плиты памятника Луке Пачоли.

Перевод надписи:

«Луке Пачоли, который был другом и советником Леонардо да Винчи и Леона Баттиста Алберти, который первый дал алгебре язык и структуру науки, который применил своё великое открытие к геометрии, изобрёл (вернее усовершенствовал) двойную бухгалтерию и дал в математических трудах основы и неизменные нормы для последующих исследований.

Население Сансепольхро по почину исполнительного комитета общины, в исправление 370-летнего забвения, поставило (этот памятник) своему великому согражданину, 1878».

вещание: если родится сын, то он получит вдвое больше из наследства, чем мать; если родится дочь, то она получит вдвое меньше матери. Родились сын и дочь. Как должно быть разделено наследство?»

Известные древние юристы давали различные решения. Сальвий Юлиан (II в. н. э.) делит наследство на 7 равных частей, из которых сын получает 4, мать 2, дочь 1. Другие юристы находили, что дочь при таком делении будет обижена, и предлагали другие решения. Авторы руководств арифметики усложняли задачу предположениями, что родилась тройня или даже 5 детей.

Руководство алгебры ал-Хорезми в значительной своей части занимается решением вопросов мусульманского наследственного права; эти задачи уже реальны и решаются при помощи уравнений.

Родоначальник европейских руководств «Книга абака» Леонардо Пизанский (XIII в.) даёт много задач на пропорциональное деление; почти все они касаются деления прибыли пропорционально капиталам или пропорционально капиталам и времени, притом часто даются не сами капиталы, а их отношения. Естественно, что усовершенствователь бухгалтерии Пачоли (1494) уделяет этим задачам большое внимание. Рядовые же авторы и учителя позднейших времён — счётных дел мастера (Rechenmeister) — не знали никакой узды в измышлении этих задач и уделяли много внимания выдумыванию механических правил для каждого частного вида их.

Задачи на пропорциональное деление во всевозможных вариантах имеются у Магницкого, в том числе почти все указанные занимательные задачи. Решает он их почти всегда своей «золотой тройной строкой». Многие из этих задач представляют интерес или по содержанию, или по забавной форме, например:

«Един человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особно выпьет тое же кадь?»

«Некий человек нанял работника на год, обещав ему дати 12 рублёв и кафтан. Но той, по случаю, работав 7 месяцев, восхоте отийти и прошаше достойныя платы с кафтаном. Он же даде ему по достоинству расчёт 5 рублёв и кафтан, и ведательно есть: коликой цены оный кафтан бяше?» [84].

5. МЕТОД ЛОЖНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

С самой глубокой древности и до XIX в. в руководствах по арифметике занимал очень видное место так называемый метод ложного положения или метод предположений. Этот метод играл чрезвычайно большую роль до XVII в., заменяя применение уравнений первой степени при решении задач, приводимых к таким уравнениям. Магницкий называет раздел своей «Арифметики», трактующий этот вопрос, «о правилах фальшивых или гадательных». Первая часть этого заглавия происходит от латинского названия regula falsi — правила ложного (положения), употреблявшегося у всех народов в течение десятков веков. Вторая часть — «правила гадательные» — напоминает название, которое этот метод сохранил и в наши дни, когда решаемые этим приёмом задачи в арифметике называются задачами на предположение. В русской учебной литературе «фальшивое правило» имеется во всех руководствах XVIII в. и значительной части учебников XIX в. (у Курганова, Аничкова, в переводных учебниках Безу, у Меморского и др.).

Проследим историю метода ложного положения ввиду его большой роли в развитии арифметики и алгебры.

В папирусе Ахмеса имеем такую задачу: «Куча. Её седьмая часть, её целое. Что составляет 19». Это значит: найти число, которое, сложенное с его седьмой частью, даст 19. Иными словами, найти число x, удовлетворяющее равенству $x+\frac{x}{7}=19$.

Примечание. Египтяне, как и многие другие народы, в письме обозначали только согласные. В транскрипциях на современные языки филологами вставляются гласные на сснований соображений, которые не имеют часто убедительных оснований и меняются. Чтение египетского символа неизвестного «хау» и перевод его словом «куча» является также гадательным. В последнее время некоторые авторы употребляют вместо термина «хау» слово «аха».

Профессор египетского языка в Гейдельбергском университете А. Эйзенлор, первый переводчик папируса Ахмеса, во втором издании своего труда даёт следующую расшифровку решения Ахмеса:

* ·7		·8	*	·$2\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
* $\frac{1}{7}$	1 *	.. 16	*	..$4\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	4	*	....9 $\frac{1}{2}$
	* $\frac{1}{4}$	2		
	* $\frac{1}{8}$	1		

Делай, как делается. Куча $16\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$

$2\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$. Вместе 19.

В геометрических задачах, переведённых из Московского папируса академиком Б. А. Тураевым, решение в большинстве случаев заключается словами: «Найдёшь, что хорошо». Это, очевидно, относится к проверке решения (Д. П. Цинзерлинг, Геометрия у древних египтян. «Известия Российской Академии наук», 1925, стр. 441—568. Представлено академиком Б. А. Тураевым в заседании Отделения исторических наук и филологии 16 апреля 1919).

Диссертация В. В. Бобынина о египетской математике написана на основании перевода папируса Ахмеса Эйзенлором.

В последние десятилетия вышло несколько английских переводов. Вместо звёздочек, которые употребляет Эйзенлор, по-видимому в целях облегчения печатания, в оригинале косые чёрточки.

Смысл решения легко понять.

Делай предположение, что «куча» есть 7; тогда $\frac{1}{7}$ её есть 1. Это записано в первом столбце, и числа эти отмечены звёздочками, обозначающими, что куча и её $\frac{1}{7}$ часть соответствуют условию задачи.

Во втором столбце записано число 8, как правая часть решаемого уравнения при сделанном предположении. Оно меньше требуемого задачей числа 19. Автор удваивает это число (* *) и, далее, очевидно, прикидывает в уме, что дальнейшее удвоение уже превосходит требуемое цисло 19, поэтому отмечает звёздочкой удвоенное число как долженствующее войти в искомый ответ. Не хватает для удовлетворения условию задачи $19 - 16 = 3$. Автор берёт $\frac{1}{2}$ от 8, т. е. 4. Так как не хватает 3, то $\frac{1}{2}$ от 8 не войдёт в решение. Далее берётся $\frac{1}{4}$ от 8 и $\frac{1}{8}$ от 8 и отмечается, что удвоенное число 8, его $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ части вместе составляют 19. Автор, таким образом, нашёл, что предположение для «хау» (неизвестного) числа 7 надо увеличить в $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ раз, чтобы удовлетворить условию задачи.

Теперь надо 7 умножить на $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Автор знает, что вместо этого можно $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ умножить на 7. В третьем столбце он это и делает. Он берёт $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ один раз (·), потом 2 раза (· ·), затем 4 раза (. . . .), складывает эти три числа и получает $7 \times 2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, как значение «хау» в виде $16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$.

Далее берётся это число, прибавляется к нему его седьмая часть $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ и получается 19, иными словами, автор проверяет, что ответ правилен. После этого следует обычный «припев» всех решений египетского руководства: «Будет хорошо».

Таких задач в папирусе Ахмеса 15, из которых 11 на отвлечённые числа, 4 на именованные; это ещё раз подкрепляет взгляд, согласно которому египетская математика не была чисто прикладной и эмпирической. Первый переводчик папируса Ахмеса Эйзенлор (1877) и за ним М. Кантор видели в решении этих задач знание египтянами уравнений первой степени. В. В. Бобынин и многие другие видят здесь в чистом виде применение метода ложного положения.

Метод **двух ложных положений** применялся в Индии и многими другими народами. Арабами он был механизирован в ту форму, в какой вошёл в европейские руководства, в том числе и русские. Вот подлинные слова арабского автора:

«*Разыскание неизвестных посредством двух ложных положений*».

«Возьми для неизвестного число, какое ты хочешь, назови его **первое положение** и поступай согласно условию задачи. Если оно подходит к условию, то это и есть неизвестное. Но если оно отклоняется в ту или другую сторону, назови разницу **первым отклонением**. Тогда возьми другое число и назови **вторым положением**; если оно не удовлетворяет условию, оно даст **второе отклонение**. После этого умножай первое положение на второе отклонение и назови произведение **первым результатом**; затем второе положение умножай на первое отклонение и это есть **второй результат**. Если оба отклонения в одно и то же время больше или оба меньше (по-нашему оба положительны или оба отрицательны.—*И. Д.*), дели разность двух результатов на разность двух отклонений; если дело обстоит иначе (т. е. одно отклонение положительно, другое отрицательно.—*И. Д.*), дели сумму двух результатов на сумму отклонений; частное и есть искомое число.

Пусть имеется число, которое, увеличенное своими двумя третями и единицей, даст 10 $\left(\text{т. е.: } x+\frac{2}{3}x+1=10\right)$.

Вот как поступай.

Если ты возьмёшь 9, то первое отклонение есть 6; если ты возьмёшь 6, то отклонение есть 1. Отсюда первый результат есть 9, второй 36 и частное, которое ты получишь, если разделишь разность результатов $36-9=27$ на разность отклонений, есть $5+\frac{2}{5}$, и это есть искомое число».

Решение в современных символах:

$$x+\frac{2}{3}x+1=10.$$

Первое положение: $x_1 = 9$;
$9 + 6 + 1 = 16$; $16 - 10 = 6$ ... первое отклонение.
Второе положение: $x_2 = 6$;
$6 + 4 + 1 = 11$; $11 - 10 = 1$ ... второе отклонение.

Первый результат: $9 \cdot 1 = 9$; второй результат: $6 \cdot 6 = 36$;

$$36 - 9 = 27 \text{ — разность результатов;}$$

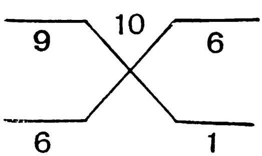
$$6 - 1 = 5 \text{ — разность отклонений.}$$

Искомое $\frac{27}{5} = 5\,\frac{2}{5}$.

В качестве второго примера автор решает задачу о лисе и собаке: лиса находится впереди собаки на 36 своих прыжков. Собака делает 4 прыжка в то время, когда лиса их делает 5; 7 прыжков собаки равны 11 прыжкам лисы. Спрашивается, сколько прыжков должна сделать лиса, пока её догонит собака. Ответ: 140.

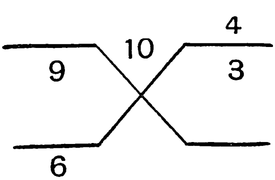
Решение таких задач было арабами «механизировано» в виде «метода весов». Изображали весы, на одну чашу «клали» первое положение; подсчитав отклонение, писали его под весами, если оно положительное, и над весами, если оно отрицательное. Если отклонения оказывались записанными оба по одну сторону весов, то накрест взятые произведения положения и отклонения вычитали одно из другого и разность делили на разность отклонений; если же отклонения оказывались записанными по разные стороны от весов, то произведения и отклонения складывали. Над точкой опоры весов писали требуемую условием правую часть равенства.

Вот решение по «методу весов» предыдущей задачи:



$$\frac{6 \cdot 6 - 9 \cdot 1}{6 - 1} = \frac{27}{5} = 5\,\frac{2}{5}.$$

Если бы за второе положение взять 3, то запись оказалась бы следующей:



$$\frac{9 \cdot 4 + 3 \cdot 6}{6 + 4} = \frac{54}{10} = 5\,\frac{2}{5}.$$

Арабский автор не даёт никакого обоснования своему правилу. Его легко дать.

Имеем уравнение:

$$ax + b = c.$$

Делаем предположения:

$$x = x_1, \qquad ax_1 + b = c_1,$$
$$x = x_2, \qquad ax_2 + b = c_2.$$

Вычитаем последние равенства почленно из данного уравнения:

$$a(x - x_1) = c - c_1 = l_1,$$
$$a(x - x_2) = c - c_2 = l_2.$$

Разделив равенства почленно, имеем:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{l_1}{l_2}, \qquad x = \frac{x_1 l_2 - x_2 l_1}{l_2 - l_1}.$$

Если $l_1 < 0$ и $l_2 < 0$, то

$$x = \frac{x_2 l_1 - x_1 l_2}{l_1 - l_2}.$$

Если l_1 и l_2 (отклонения) разных знаков и $l_2 > 0$ и $l_1 < 0$, то решение примет вид:

$$x = \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{l_2 + l_1}.$$

Если же $l_2 < 0$ и $l_1 > 0$, то

$$x = \frac{-(x_1 l_2 + x_2 l_1)}{-(l_2 + l_1)} = \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{l_2 + l_1}.$$

Магницкий, не рассматривая отрицательных чисел в своей арифметике, подчёркивает существование трёх случаев при применении метода ложного положения: «Сие правило разделяется на три: первое правило есть, егда первое и второе отклонение суть больше (положительные); второе правило, егда оба отклонения суть меньше (отрицательные); третье же егда едино отклонение есть больше, другое же меньше», т. е.:

$$x = \frac{x_1 l_2 - x_2 l_1}{l_2 - l_1}, \qquad x = \frac{-x_1 l_2 + x_2 l_1}{-l_2 + l_1}, \qquad x = \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{l_2 + l_1}.$$

Ясно, что второй случай

$$x = \frac{-x_1 l_2 + x_2 l_1}{-l_2 + l_1} = \frac{x_1 l_2 - x_2 l_1}{l_2 - l_1}$$

совпадает с первым.

Эта примитивность трактовки Магницкого в данном случае выступает особенно ярко в связи с его заявлением в предисловии книги:

Ради правил сих косвенных,
Четвёртой части (книги.— *И. Д.*) свойственных,
Вся фальшивая часть назвася
От них же древле та издася.
Сей же части **чин ин изысках**
Зело краток и тут же вписах,
Еже огняти труд великий
Хотящим разум взять толикий.

Приступая к изложению «фальшивого правила», Магницкий заявляет:

Зело бо хитра есть сия часть,
Яко можеши ею все класть,
Не токмо что есть во гражданстве,
Но и высших наук в пространстве (в области высших наук.— *И. Д.*)
Яже числятся в сфере неба,
Якоже мудрым есть потреба.

Вот пример расположения вычислений при применении фальшивого правила у Магницкого:

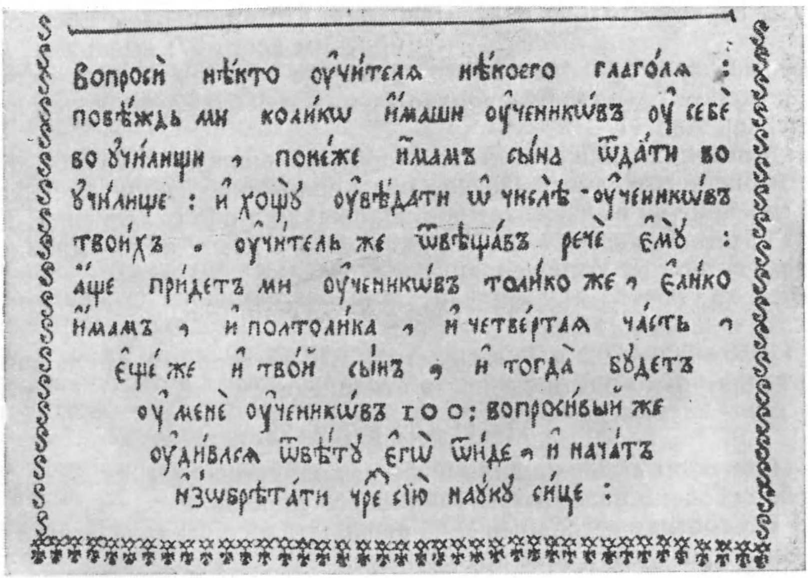

Вопроси нѣкто оучителѧ нѣкоего глаголѧ:
повѣждь ми коликѡ имаши оученикѡвъ оу себе
во оучилищи, понеже имамъ сына ѿдати во
оучилище: и хощꙋ оувѣдати ѡ числѣ оученикѡвъ
твоихъ. оучитель же ѿвѣщавъ рече емꙋ:
аще придетъ ми оученикѡвъ толико же, елико
имамъ, и полтолика, и четвертаѧ часть,
еще же и твой сынъ, и тогда бꙋдетъ
оу мене оученикѡвъ ро: вопросивый же
оудивлсѧ ѿветꙋ его ѿиде, и начатъ
изобрѣтати чрез сїю наукꙋ сице:

Рис. 94. Задача из «Арифметики» Магницкого.

Перевод:

«Спросил некто учителя: сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына. Учитель ответил: если придёт ещё учеников столько же, сколько имею, и полстолько и четвёртая часть и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Удивившись ответу, спрашиватель отошел и стал изыскивать посредством сей науки так:»

Первое положение			Второе положение
$\begin{array}{r}24\\24\\12\\6\\1\\\hline 67\end{array}$	$\begin{array}{r}32\times33\\\hline 66\\99\;\\\hline 1056\\-264\\\hline 792\end{array}$	$\begin{array}{r}24\times11\\\hline 24\\24\;\\\hline 264\end{array}$	$\begin{array}{r}32\\32\\16\\8\\1\\\hline 89\end{array}$
«меньше» 33,			«меньше» 11.

«Через второе фальшивых правило» 792:22=36. «Толико бяше в том училище учеников».

$$\begin{array}{ccc} 24 & \text{———} & 33 \\ & \times & \qquad \text{вычти } \mathbf{22} \\ 32 & \text{———} & \mathbf{11} \end{array}$$

В первом столбце подсчитывается, что при первом предположении (учеников было 24) мы получим всего 67: «меньше», чем 100, на 33. В правом столбце таким же образом находится, что при втором предположении, что учеников было 32, получается 89: «меньше» на 11.

Магницкий пишет: «через второе фальшивых правило», т. е. что имеем тот случай, когда оба положения дали «меньше». В середине он выписывает оба положения и оба отклонения. Тут же крестом указывается, какое число на какое надо умножить, и выполняются умножения:

$$32\times33=1056 \text{ и } 24\times11=264.$$

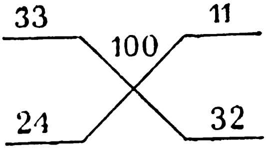
1056—264=792 и указывается, что по второму «фальшивых правилу» надо найти разность отклонений:

$$33-11=22 \text{ и } 792:22.$$

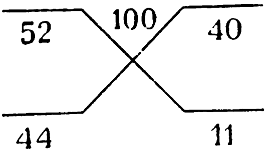
Способом вычёркивания цифр выполняется деление: 792 : 22= =36. «Толико бяше в том училищи учеников».

По «методу весов» решение располагалось бы так. Даём 3 решения при следующих положениях:

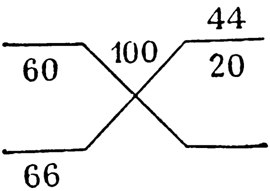
1)	Первое положение	24,	Второе положение	32,
2)	» »	52,	» »	40,
3)	» »	60.	» »	20.



$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36;$$



$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36;$$



$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

6. «ДЕВИЧЬЕ» ИЛИ «СЛЕПОЕ» ПРАВИЛО

Из многочисленных правил старых руководств арифметики, ныне забытых, остановимся только на одном, называвшемся в одних книгах «девичьим», в других «слепым», в третьих «девичьим или слепым». Вот как объясняет название этого правила ревельское «Руководство к арифметике» Михаила Вебера (1737):

«Это правило, в известной мере родственное правилу смешения, называется «Regula Virginum, potorum» или «Coecis», что означает «правило девушек, пьяниц, или слепое правило». Последнее название (coecis, в других книгах caecis. — *И. Д.*) происходит от арабского слова Zekis, которое означает неверную жену. Этот смысл соответствует наилучшим образом существу дела, так как применение этого правила даёт не одно решение, а часто значительное их число.

Вот пример решения простейшей задачи на это правило, взятой из названного руководства (стр. 288). Передаётся задача буквально, как иллюстрация стиля учебника того времени.

«80 персон, получив известие о нуждаемости среди новообращённых (в христианство) малабарцев, собрали между собой 200 талеров для пересылки новым истинным членам христовой церкви. Среди этих благотворителей были мужчины, женщины и некоторое число благовоспитанных школьников. Каждый мужчина внёс 6 талеров, женщина 3 талера, школьник 1 талер. Вопрос: сколько было каждого рода (жертвователей)?

Решение даётся следующее:

$$
\begin{array}{r}
80 \text{ персон} \\
- \\
30 \\
\hline
50
\end{array}
\left\{
\begin{array}{lc}
1 \text{ мужчина} & 6 \\
1 \text{ женщина} & 3 \\
1 \text{ школьник} & 1
\end{array}
\right|
\begin{array}{c}
5 \\
2 \\

\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}
\begin{array}{l}
200 \text{ талеров} \\
- \\
80 \\
\hline
120 \text{ разбивай}
\end{array}
$$

5/ 100 20 мужчин
2/ 20 10 женщин
50 школьников

Проверка:

20 мужчин по 6	талеров	—	120
10 женщин по 3	»	—	30
50 школьников по 1	»	—	50
80 персон			200 талеров».

Автор не даёт никакого обоснования своему правилу, ограничиваясь только указанием о том, что надо делать, т. е. по существу повторяя смысл фразы египетского автора: «делай, как люди делают».

Уловить смысл «делаемого» нетрудно. Мы в настоящее время, решая приведённую задачу, рассуждали бы так:

Предположим, что мужчин было x, женщин y. Тогда детей будет $80-x-y$. Все эти числа целые положительные:

$$6x+3y+1\,(80-x-y)=200,$$

$$6x+3y+80-x-y=200,$$

$$(6-1)\,x+(3-1)\,y=200-80,$$

$$5x+2y=120.$$

Это и записано в решении в фигурных скобках и вправо от них.

Надо разыскать для x и y такие целые положительные значения, чтобы

$$5x+2y=120.$$

Автор пишет: «разбивай 120».

Он разбивает 120 так, чтобы одно слагаемое делилось на 5, другое на 2. Выбрав разбиение числа 120 на 100 и 20, он делит их в следующих строках на 5 и 2 соответственно, записывая делители слева, отделёнными от делимых скобкой (обычный в те времена способ письма), и получает: 20 мужчин, 10 женщин. Число школьников находится вычитанием из 80 числа 30, числа мужчин и женщин вместе (в верхней строке слева).

Разбиений числа 120 на два слагаемых, из которых одно кратно 5, другое кратно 2, существует несколько, откуда возможные решения задачи:

Мужчин x	Женщин y	Школьников $80-x-y$
20	10	50
22	5	53
18	15	47
16	20	44
14	25	41
12	30	38
10	35	35
8	40	32
6	45	29
4	50	26
2	55	23

Эта многочисленность возможных ответов задачи и послужила основанием для названия способа «слепым», «способом пьяного» или «девичьим способом».

Ясно, что «девичье правило» старых учебников арифметики есть механическое правило решения задач, приводящихся к неопределённым уравнениям первой степени. Разные примеры таких задач весьма популярны. Пишущий эти строки в детские годы много раз слышал от эстонских крестьян задачу: за 100 рублей купить 100 предметов, цены которых 10 рублей, 5 рублей и 50 копеек. Решение аналогично.

В указанных выше задачниках имеются задачи на «девичье правило» и более сложные, приводящиеся к неопределённым уравнениям с тремя и четырьмя неизвестными. Такие задачи, требующие более сложных суждений, ещё в большей мере убеждали читателя в «слепоте» применяемого для их решения правила.

7. ПОЛИТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

Под таким названием понимали арифметику, применённую к задачам статистики общественных явлений. Политическая арифметика представляет расчёты по элементарной теории вероятностей. Первое изложение политической арифметики в России и употребление самого термина принадлежит петербургскому академику Эдуарду Давидовичу Коллинсу (1791—1840). Его «Лекции политической арифметики» (книга без указания года издания, относится к концу жизни автора, так как содержит ссылки на издания 1832 г.) пользуются статистическими работами петербургского же академика К. Ф. Германа (1767—1838).

Предмет политической арифметики автор определяет как «применение обыкновенной арифметики и теории вероятностей к надёжной и по возможности точной оценке всего того, что может иметь благоприятное или вредное влияние на благоденствие и могущество государства, на устройство и благосостояние его сословий. Поэтому предметом политической арифметики будет всё подлежащее вычислению в статистике государства».

В книге рассматриваются вопрос о таблицах смертности (указывается, что метрики были введены в России в 1722 г.), таблицы о движении народнонаселения, вопросы страхования. Приводятся большие выдержки из французских авторов (Лапласа, Франкера, Дюпеня и др.). Работа Коллинса вышла ранее «Оснований математической теории вероятности» В. Я. Буняковского (1846), обычно признаваемых первой русской работой, применяющей теорию вероятностей к общественным явлениям, и представляет интерес с этой точки зрения.

Под названием политической арифметики издавались учебники в предреволюционные годы для коммерческих учебных заведений.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАБАВЫ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В УЧЕБНИКАХ АРИФМЕТИКИ

1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАБАВЫ

Последняя глава четвёртой книги «Арифметики» Магницкого озаглавлена: «О утешных некиих действах через арифметику употребляемых». Автор пишет: «В надлежащем сем месте видится ми приличнее иных мест, последуя арифметикам, ко утешению через сию науку, паче же... изощряти учащимся ум свой, положити некие утешные действа (аще и не зело нуждныя)... понеже заключается в них не ино что, но токмо еже от разума утешение».

Магницкий указывает, что он в этом вопросе «следует арифметикам». Действительно, многие предшествующие ему авторы учебников и задачников по арифметике помещали в своих книгах такой раздел или писали целые книги «для изощрения ума молодёжи», как озаглавил свою книгу Алкуин (735—805), учёный советник императора Карла V.

В книгах и разделах учебников под таким заглавием иноземные авторы помещали, кроме арифметических забав, и занимательные задачи (о них скажем в дальнейшем особо), Магницкий же занимательные задачи вкрапливает в разные разделы своей книги рядом с серьёзными задачами. В названном специальном разделе он помещает лишь «забавы», заключающиеся в угадывании чисел, нахождении дней, определении положения некоторой вещи. Все «забавы» выполняются в числах и помещены в арифметике.

Приведём примеры этих «забав».

Первая забава. Один из участвующих в игре берёт кольцо и надевает на один из пальцев на определённый сустав. Требуется угадать, у кого, на каком пальце и на каком суставе находится кольцо.

Пусть кольцо находится у четвёртого человека на втором суставе пятого пальца (надо условиться, что суставы и пальцы нумеруются всеми одинаково).

В книге даётся такой способ угадывания. Угадывающий просит кого-нибудь из компании сделать следующие действия, не называя получающихся чисел:

1) нумер лица, имеющего кольцо, умножить на 2; спрашиваемый, в уме или на бумаге, выполняет:

$$4 \cdot 2 = 8;$$

2) к полученному произведению прибавить 5:

$$8 + 5 = 13;$$

3) полученную сумму умножить на 5:

$$13 \cdot 5 = 65;$$

4) к произведению прибавить нумер пальца, на котором находится кольцо:

$$65 + 5 = 70;$$

5) сумму умножить на 10:

$$70 \cdot 10 = 700;$$

6) к произведению прибавить нумер сустава, на котором находится кольцо:

$$700 + 2 = 702.$$

Результат объявляется угадывающему.

От полученного числа последний отнимает 250 и получает: $702 - 250 = 452$.

Первая цифра (слева направо) даёт нумер человека, вторая цифра — нумер пальца, третья цифра — нумер сустава.

Кольцо находится у четвёртого человека на пятом пальце на втором суставе.

Нетрудно найти для этого приёма объяснение, которого Магницкий не даёт.

Пусть кольцо было у человека № a, на пальце № b, на суставе № c.

Выполним указанные действия над числами a, b, c;

1) $a \cdot 2 = 2a$;

2) $2a + 5$;

3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$;

4) $10a + 25 + b = 10a + b + 25$;

5) $(10a + b + 25) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$;

6) $100a + 10b + 250 + c = 100a + 10b + c + 250$;

7) $100a + 10b + c + 250 - 250 = 100a + 10b + c$.

Получили число, в котором нумер человека есть цифра сотен, нумер пальца — цифра десятков, нумер сустава — цифра единиц. Правила игры применимы при любом числе участников.

Вторая забава. Считаем дни недели, начиная с воскресенья: первый, второй, третий и т. д. до седьмого (субботы).

Кто-нибудь задумал день. Угадать, какой день он задумал.

Пусть задумана пятница — шестой день.

Угадывающий предлагает выполнить про себя следующие действия:

1) умножить нумер задуманного дня на 2:

$$6 \cdot 2 = 12;$$

2) прибавить к произведению 5:

$$12 + 5 = 17;$$

3) умножить сумму на 5:

$$17 \cdot 5 = 85;$$

4) приписать произведению в конце нуль и назвать результат: 850.

От этого числа угадывающий отнимает 250 и получает:

$$850 - 250 = 600.$$

Был задуман шестой день недели — пятница.

Обоснование правила такое же, как в предыдущем случае.

Третья забава. Пусть кто-нибудь задумает несколько чисел и отметит их у себя нумерами: I, II, III и т. д.

Положим, он задумал числа 8, 6, 4, 2.

Следует выполнить следующие действия:

1) умножить первое число на 2:

$$8 \cdot 2 = 16;$$

2) к произведению прибавить 5:

$$16 + 5 = 21;$$

3) сумму умножить на 5:

$$21 \cdot 5 = 105;$$

4) к произведению прибавить 10:

$$105 + 10 = 115;$$

5) к сумме прибавить II задуманное число:

$$115 + 6 = 121;$$

6) сумму умножить на 10:

$$121 \cdot 10 = 1210;$$

7) к произведению прибавить III задуманное число:

$$1210 + 4 = 1214;$$

8) сумму умножить на 10:

$$1214 \cdot 10 = 12\,140;$$

9) к произведению прибавить IV задуманное число:

$$12\,140 + 2 = 12\,142.$$

Угадывающий отнимает от суммы 3500:

$$12\,142 - 3500 = 8642.$$

Цифры последнего числа дают задуманные числа.

Если было задумано три числа, то вычисление надо окончить на 7-м действии и из результата вычесть 350:

$$1214 - 350 = 864.$$

Если задумано 2 числа, то вычисление кончается на 5-м действии и вычитается из результата 35:

$$121 - 35 = 86.$$

Объяснение забавы получается при выполнении примера на буквенных данных.

Задуманы числа: a, b, c, d.

Выполним указанные действия:

1) $a \cdot 2 = 2a;$

2) $2a + 5;$

3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25;$

4) $10a + 25 + 10 = 10a + 35;$

5) $10a + 35 + b = 10a + b + 35;$

6) $(10a + b + 35) \cdot 10 = 100a + 10b + 350;$

7) $100a + 10b + 350 + c = 100a + 10b + c + 350;$

8) $(100a + 10b + c + 350) \cdot 10 = 1000a + 100b + 10c + 3500;$

9) $1000a + 100b + 10c + d + 3500.$

Вычитание 3500 даёт четырёхзначное число, цифры которого слева направо дают задуманные числа.

Данное Магницким простое правило применимо для задуманных однозначных чисел. В других случаях правило требует усложнения [85].

2. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Древнейшей занимательной задачей можно считать задачу № 79 папируса Райнда, с которой уже знаком читатель. В египетском тексте она читается так:

Письмо (писец)	7		Решение:
Кошка	49		. 2801
Мышь	343		.. 5602
Ячмень	2401		.... 11 204
Мера зерна	16 807	Вместе	19 607
Вместе	19 607		

Это первоисточник приведённой нами выше задачи о семи старухах, которая, как видим, примерно 4000-летней давности. Несмотря на это она перепечатывается и, вероятно, будет перепечатываться в дальнейшем в сборниках занимательной математики, как историческая иллюстрация.

Как надо понимать данное египетским автором решение задачи?

Проверка показывает, что $2801=(7+49+343+2401)+1=$ $=(7+7^2+7^3+7^4)+1$. Это число удваивается (..) и учетверяется (....); сложение трёх чисел даёт (7×2801) число 19 607. Ясно, что автор находит сумму геометрической прогрессии $7+7^2+7^3+$ $+7^4+7^5$, только способ вычисления не совпадает с нашим. Этот способ становится понятным из следующего.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии, у которой первый член a и знаменатель q,

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

При $q=a$, как в этой задаче, имеем:

$$S_n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1} = \frac{a(a^n-1)}{a-1} = a(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)=a(S_{n-1}+1).$$

В данной задаче $2801=S_4+1$; для получения $S_5=a\ (S_4+1)$ нужно 2801 умножить на 7, что автор и делает обычным египетским способом удвоения и сложения.

Французский историк математики Родэ обнаружил у арабского математика XIII в. ибн-Албанны тот же способ при решении шахматной задачи, т. е. при вычислении суммы членов прогрессии

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}.$$

Шахматная задача

Рассказывается, что изобретатель шахмат, которому было предложено запросить любую награду, попросил положить ему на первую клетку шахматной доски одно зерно, на вторую два зерна, на третью 4 зерна и продолжать так удваивать число зёрен на каждой следующей клетке. Легко вычислить, хотя бы по таблице степеней числа 2, что $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Подсчитано, что при хорошем урожае для получения такого количества зёрен потребовалась бы площадь, превосходящая всю сушу.

Та же задача на геометрическую прогрессию со знаменателем 2 встречается в очень многих формах, в частности в «Арифметике» Магницкого.

«Некий человек продае коня за 156 рублёв, раскаявся же, купец нача отдавати продавцу, глаголя: яко несть мне лепо взяти сицевого коня, недостойного такия высокия цены; продавец же предложил ему иную куплю, глаголя: аще ти мнится велика цена сему коню быти, убо купи токмо гвоздие, их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвоздей во всякой подкове по шести: и за един гвоздь даждь ми едину полушку ($\frac{1}{4}$ коп.), за другой — две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи. Купец же, видя столь малую цену и коня хотя в дар себе взяти, обещался тако цену ему платити, чая не больше 10 рублёв за гвоздие дати. И ведательно есть: коликим купец он проторговался. Приидет: 4 178 703 3/4 коп.»

Решение заканчивается стихами:

Хотяй туне притяжати,
от кого что приимати
да зрит то себе опасно,
чтобы взяти не напрасно,
с тем бо своя истеряет,
многократно измеряет.

В. В. Бобынин считает, что этот вариант задачи имеет русское происхождение; он встречается в рукописях XVII в.

Отметим ещё, что шахматная задача на геометрическую прогрессию отражена в «Божественной комедии» Данте, где читаем («Рай», песнь XXVIII, стихи 89—92):

Заискрилась всех тех кругов краса
И был пожар в тех искрах необъятный;
Число же искр обильней в сотни раз,
Чем клеток счёт двойной в доске шахматной.

(Перевод Д. Мина.)

Задача эта фигурирует, как оказывается, не только в сборниках занимательной арифметики. По сообщению «Газеты чиновника» от 14 июня 1914 г., у мирового судьи г. Новочеркасска разбиралось дело о продаже стада 20 овец по условию — уплатить за первую овцу 1 копейку, за вторую 2 копейки, за третью 4 копейки и т. д. (Л. Л. Мищенко, Основы общей методики, 1919).

Многие другие задачи современных сборников имеют хотя и меньшую, но всё же достаточно большую давность, так как они содержались в греческих «антологиях», в сборнике армянского математика VII в. Анании Ширакаци (см. «Вопросы и решения вардапета Анании Ширакаци», издал и перевёл И. А. Орбели, Пг., 1918). Книга открывается заявлением Анании: «И, сильно возлюбив искусство числительное, помыслил я, что без числа никакое рассуждение философское не слагается, всей мудрости матерью его почитая».

В первом специальном сборнике занимательных задач Алкуина, английского учёного[1] и богослова, советника и приближённого Карла Великого, одного из учителей Палатинской школы, созданной императором Карлом для своих детей, содержится также задача о шахматах. В сборнике Алкуина содержится не одна из общераспространённых в настоящее время занимательных задач, например задача о волке, козе и капусте, которых надо перевезти через реку при условии, что в лодку можно одновременно взять лишь один из объектов, но нельзя оставить на берегу ни волка с козой, ни козу с капустой. Другая, менее популярная, задача Алкуина: «Два человека купили на 100 сольдо свиней и платили за каждые пять штук по два сольдо. Свиней они разделили, продали опять каждые пять штук по 2 сольдо и при этом получили прибыль. Как это могло случиться?» Оказывается, что поступили так: на 100 сольдо было куплено 250 свиней; их разделили на два равных стада, по 125 свиней в каждом; далее отдавали из первого стада по 2 и из второго по 3 за один сольдо; за 120 свиней первого стада таким образом получается 60 сольдо, за 120 свиней второго стада — 40 сольдо, и по 5 свиней каждого стада остаются в качестве прибыли.

Первым печатным сборником занимательных задач (1568) является сборник известного итальянского архитектора Алберти (1404—1472). Автор пишет свою книгу не на учёном латинском языке, а на народном итальянском, подчёркивая, что он во всей своей литературной деятельности «больше старался помочь многим, чем угождать немногим». Задачи сборника Алберти почти все геометрические.

Следующими по времени составления сборниками занимательных задач, оказавшими влияние и на русскую учебную литературу, являются два издания XVII в.: сборник Клода Гаспара Баше де Мезириака 1612 г. «Игры и задачи, основанные на математике» (издание Вольфа, 1877 г.) и такой же сборник

[1] Алкуин интересовался совершенными числами, о которых у нас была речь.

Жака Озанама «Математические и физические развлечения с трактатом о построении простых часов», который переиздавался до 1790 г. 6 раз и переводился на многие языки. Ввиду значения обоих этих авторов и для современного любителя занимательной математики дадим о том и другом некоторые сведения.

Имя Баше де Мезириака связывается в теории чисел с методом решения неопределённых уравнений первой степени и теорией магических квадратов. Он издал в 1621 г. сочинения Диофанта; на полях этого издания Ферма делал свои примечания, послужившие основанием многих исследований нового времени по теории чисел.

Ж. Озанам был известным преподавателем математики и писателем, а с 1701 г. и членом Парижской Академии наук. Сын весьма зажиточных родителей, готовившийся по желанию родителей к духовной карьере, после 4 лет занятий богословием и схоластической философией, отдался самостоятельным занятиям математикой, несмотря на угрозу отца (на самом деле приведённую в исполнение) лишить его наследства. Он стал добывать средства к жизни уроками математики, поборов страсть к играм и бросив выгодное ремесло составления гороскопов. Когда во время войн число учеников сократилось, Озанам занялся писанием учебников. Так возникли и его знаменитые «Развлечения», из которых черпали задачи все позднейшие авторы книг по занимательной математике.

Первой русской книгой, посвящённой специально занимательной арифметике, является мало известная брошюра: **И. Краснопольский, Гадательная арифметика для забавы и удовольствия** (Петербург, 1789, 62 стр., 41 задача). В этой брошюре содержится большинство распространённых занимательных задач.

Следующей такой работой на русском языке была брошюра: **Иван Буттер, Занимательные и увеселительные задачи и загадки** (Москва, 1831; второе издание, 1844, 56 стр.).

В 1877 г. выходит русский перевод книги Баше «Игры и задачи, основанные на математике».

Можно указать ещё на несколько работ, содержащих аналогичный материал:

Э. Люкас (1842—1891), Математические развлечения, пер. В. И. Обреимова, Спб., 1883.

И. Виола, Математические софизмы, М., 1883.

В. И. Обреимов (1843—1910) издал несколько сборников занимательных задач; ему последовал в начале нынешнего века ряд авторов: Н. Н. Аменицкий, А. А. Лямин, М. С. Лянченков, А. В. Сатаров и др. Был издан и ряд переводных книг по занимательной математике.

Особого внимания заслуживают труды в области занимательной математики Емельяна Ивановича Игнатьева: 3 тома книги «В царстве смекалки» и более ранняя книга: «Математические игры, развлечения и задачи», Спб., 1904.

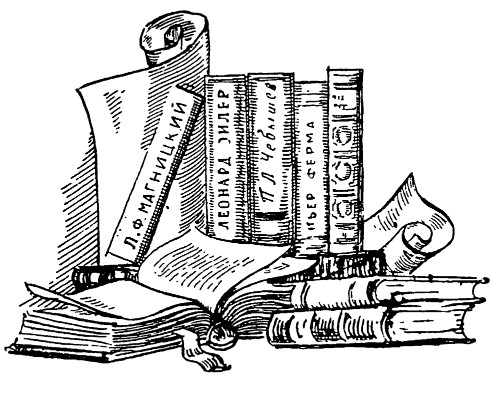
О Емельяне Ивановиче Игнатьеве известно лишь то, что он учился в Киевском университете, где в 1889 г. получил серебряную медаль за работу «Приближённое вычисление определённых интегралов». В 1897 г. в Киевском физико-математическом обществе слушался его доклад «О X книге Евклида». В 1909 г. он учитель Василеостровской новой школы в Петербурге, а после революции — заведующий рабфаком в г. Туле.

Исключительным энтузиастом привития советской молодёжи любви к математике путём внесения занимательного сюжета в школьную математику является Яков Исидорович Перельман (1882—1942). Тираж его книг и брошюр, известных большинству учителей, доходит до нескольких миллионов.

Яков Исидорович Перельман родился в Белостоке в 1882 г., умер в Ленинграде во время блокады в 1942 г. Окончив Петербургский лесной институт в 1909 г. со званием учёного лесовода I разряда, Я. И. Перельман состоял сотрудником и редактором журналов «Природа и люди» и «В мастерской природы». Кроме того, он помещал статьи и заметки десятками в разных изданиях. Будучи в основном физиком. Перельман во второе двадцатипятилетие своей литературной деятельности серьёзно занялся популяризацией математики. Его «занимательные» книги появляются в большом количестве: геометрия в 1925 г., арифметика в 1926 г., задачи в 1928 г. и затем целый ряд других книг, брошюр и статей по математике.

Профессором математики и механики в Лесном институте был замечательный педагог Аркадий Семёнович Домогаров (1863—1908), от которого, возможно, Я. И. Перельман и усвоил искусство популяризации.

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИКАХ, УПОМЯНУТЫХ В КНИГЕ



На предыдущих страницах мы упоминали десятки имён, оставивших свой след в истории арифметики. Учащиеся очень часто интересуются сведениями о жизни и деятельности носителей этих имён. Сообщение биографических данных о них является в руках учителя ценным средством возбуждения интереса учащихся к арифметике, а этот интерес является определяющим в успехе преподавания. Требуемые сведения учителю приходится искать в разных источниках, которые не всегда у него имеются под руками. В помощь ему помещаются здесь краткие данные, которые могут удовлетворить основным запросам учащихся.

Л. Ф. МАГНИЦКИЙ

Леонтий Филиппович Магницкий родился 9 (19) июня 1669 г., умер 19(30) октября 1739 г., как указывается в газете «Московские ведомости» № 68 за 1857 г. В той же газете за № 76 от 1836 г. напечатан длинный «список с надписи на могильном камне, сочинённый сыном Магницкого Иваном», из которого извлекаем следующие строки:

«В вечную память... добродетельно пожившему Леонтию Филипповичу Магницкому, первому в России математики учителю, зде погребённому, мужу... любви к ближнему нелицемерной, благочестия ревностного, жития чистого, смирения глубочайшего, великодушия постоянного, нрава тишайшего, разума зрелого, обхождения честного, праводушия любителю, в слугах отчеству усерднейшему попечителю, подчинённым отцу любезному, обид от неприятелей терпеливейшему, ко всем приятнейшему, и всяких обид, страстей и злых дел силами чуждающемуся, в наставлениях, в рассуждении, совете друзей искуснейшему, правды как о духовных, так и гражданских делах опаснейшему хранителю, добродетельного жития истинному подражателю, всех добродетелей собранию; **который путь сего временного и прискорбного жития начал 1669 года июня 9-го дня, наукам изучился дивным и неудобовероятным способом, его величеству Петру первому для**

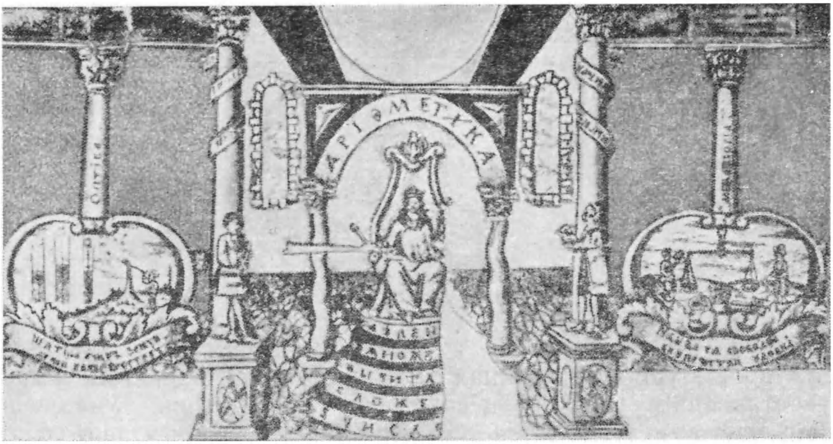


Рис. 95. Вариант заставки, ошибочно отнесённый к «Арифметике» Магницкого.

остроумия в науках учинился знаем в 1700 году и от его величества, по усмотрении нрава ко всем приятнейшего и к себе влекущего, пожалован, именован прозванием Магницкий и учинён российскому благородному юношеству учителем математики, в котором звании ревностно, верно, честно, всеприлежно и беспорочно служа и пожив в мире 70 лет, 4 месяца и 10 дней, 1739 года, октября 19-го дня, о полуночи в 1 часу, оставя добродетельным своим житием пример оставшим по нём, благочестно скончался...

Не по должности написал горькослёзный Иван, нижайший раб, сын ему любезный».

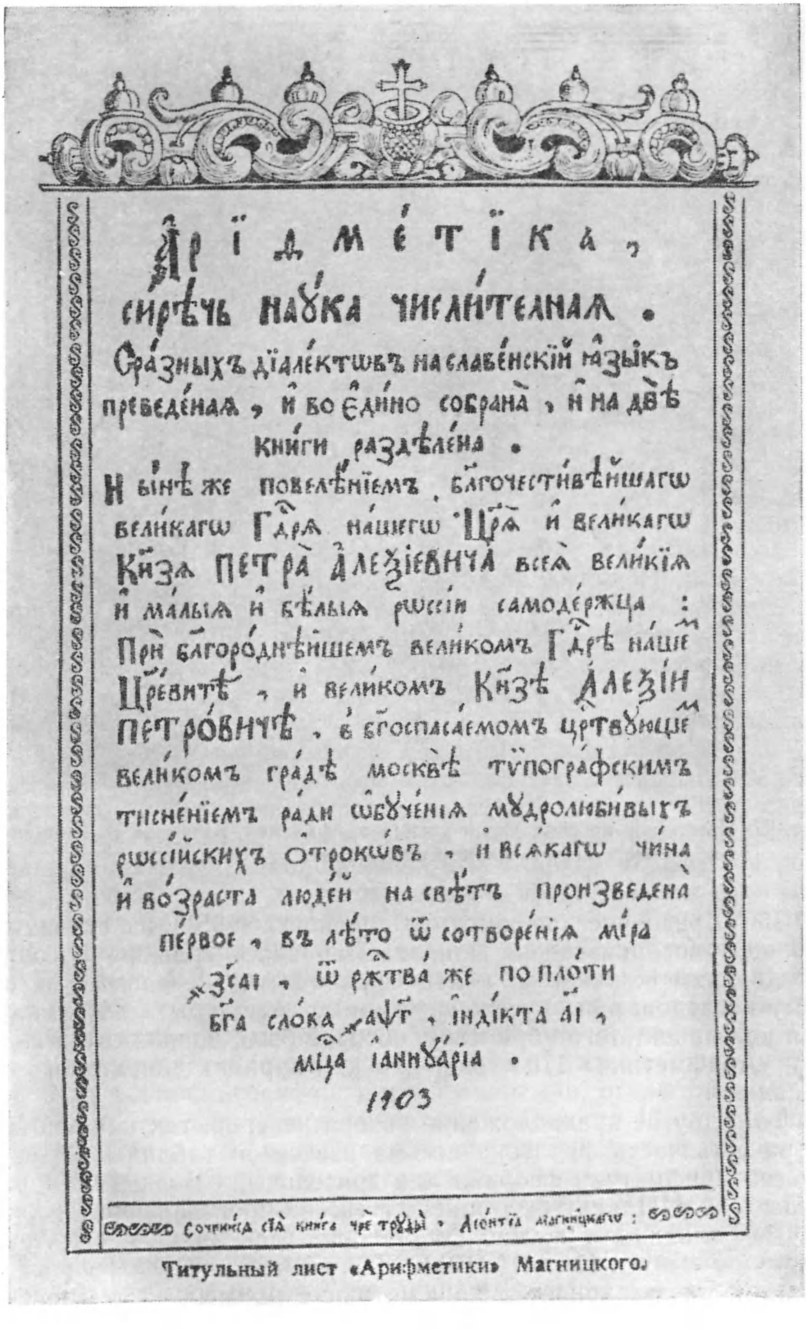
Этот документ, данные которого подтверждаются и другими источниками, не вызывает никаких сомнений.

Высказанное в статье И. Голубева («Математика в школе», 1948, №6) сомнение относительно даты смерти является лишённым всякого основания.

Совершенно непонятно заявление проф. А. В. Ланкова («К истории развития передовых идей в русской методике математики», 1951, стр. 13—14):

«В 1682 г. напечатана таблица «Считание удобное...». Автор не указан. Язык предисловия близок к языку Магницкого. В книге Магницкого эта таблица дана в другом виде. **Можно предполагать, что эта таблица составлена Магницким».** На стр. 9 указывается правильный год рождения Магницкого, но это не мешает А. В. Ланкову приписать авторство первой печатной русской математической книги 11-летнему мальчику!

Необоснованными являются и некоторые другие мнения, высказанные в разное время различными авторами. Так, например, в большом издании Института истории искусств Академии наук


Арїдметїка,

сиречь наука числителная.

Сразныхъ дїалектωвъ на славенскiй языкъ
преведенная, и во едино собрана, и на двѣ
книги разделена.

И нынѣ же повеленiемъ благочестивѣйшагω
великагω Гдря нашегω Цря и великагω
Кнзя Петра Алеξiевича всея великiя
и малыя и бѣлыя россiи самодержца:
При благороднѣйшемъ великомъ Гдрѣ нашемъ
Царевичѣ, и великомъ Кнзѣ Алеξiи
Петровичѣ, в богоспасаемомъ црствующемъ
великомъ градѣ москвѣ тупографскимъ
тисненiемъ ради обученiя мудролюбивыхъ
россiйскихъ отроковъ, и всякагω чина
и возраста людей на свѣтъ произведена
первое, въ лѣто ωт сотворенiя мiра
зсаi, ωт рождества же по плоти
бга слова ауг, iндикта аi,
мца iаннуарiа.

1703

Сочинися сiя книга чрез труды Леонтiя Магницкагω:

Титульный лист «Арифметики» Магницкого.

Рис. 96. «Арифметика, сиречь наука числительная»

Рис. 97. Наглядное пособие для изучения арифметики, изданное В. Киприановым в 1705 г. Размер подлинника 105 *см*×76 *см*.

СССР «Древнерусская книжная гравюра» (1951) на страницах 300—301 воспроизведена прилагаемая здесь гравюра с сопровождающим её текстом: «Эти фрагменты, неведомые ни одному исследователю русской гравюры, могут быть восприняты или как проект того убранства, которое было воплощено в издании «Арифметики» 1703 года, или как вариант для второго его издания».

То и другое предположение автора неверно, так как эта гравюра есть часть фронтона весьма известной таблицы «Новый способ арифметики феорики или зрительныя» Василия Киприанова 1705 г. Плакат был описан с его воспроизведением в книге Д. Д. Галанина «Леонтий Филиппович Магницкий и его Арифметика», выпуск II и III, 1914. На этом плакате в вопросах и ответах даётся конспект арифметики с примерами вычислений и со стихами, частично повторяющими стихи Магницкого.

Можно было бы указать ещё несколько подобных необоснованных фактов, включаемых в биографию.

Один из биографов Магницкого Н. А. Кривицкий сообщает, что «священник города Осташкова Ф. Ф. Прусаветский (XVIII в.) составил «Описание города Осташкова», в котором в главе «Краткое описание жизни мужей, родившихся в Осташкове, но (!) сделавшихся известными» (почему «но»? Как будто Осташков не мог являться местом рождения лиц, сделавшихся известными. — *И. Д.*), указывает и Л. Ф. Магницкого, сына крестьянина Осташковской патриаршей слободы, по прозванию

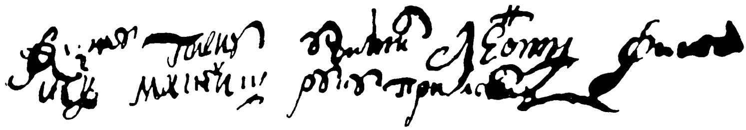


Рис. 98. Подпись Л. Ф. Магницкого (с половины верхней строки): «Леонтий Филиппович Магницкий руку приложил».

Телятина, говоря о нём: «В младых летах неславный и недостаточный человек, он прославился здесь только тем, что сам, научившись чтению и письму, был страстный охотник читать в церкви и разбирать мудрёное и трудное. Крестьяне слободы послали его некогда с рыбой в монастырь, которому принадлежала слобода. Там, узнав способности мальчика, оставили его для чтения... Каким случаем перешёл он в Симонов московский монастырь и как почерпнул знание немецкого и латинского языков, арифметических и математических знаний, я не знаю».

Н. А. Кривицкий, в работе которого («Труды II областного тверского археологического съезда в 1903 г.», стр. 435 и след.) приведены указанные выше и ряд других документов, делает правдоподобное предположение, что мальчик мог быть перевезён в Москву знатными богомольцами, посещавшими известный в то время Волоколамский монастырь. Автор записки о Магницком указывает, что Леонтий «из уст царя Петра проименован из Телятина Магницким, в сравнении того, как магнит привлекает к себе железо, так он природными и самообразованными способностями своими обратил внимание на себя».

В имеющихся биографиях Магницкого указывается, что он учился в Славяно-греко-латинской академии, открытой в 1685 г. в Москве. Это является сомнительным. Сын его Иван, учившийся в этой академии, в надписи на могильном камне не упустил бы упомянуть об этом и не сказал бы, что «отец наукам изучился дивным и неудобовероятным способом». В «Истории Московской славяно-греко-латинской академии» С. Смирнов (М., 1855) в разделе «Судьбы наставников и учеников Академии первого периода» не упоминает Магницкого (он мог бы учиться в академии именно в первый период). В дальнейшем в истории академии упоминается Магницкий, но эти сведения относятся к Ивану Леонтьевичу Магницкому.

В математике Магницкий был самоучкой даже в том случае, если допустить маловероятное его учение в академии: в ней математика не преподавалась. Этим, вероятно, объясняется, что книга Магницкого оказалась «вратами мудрости» для многих самоучек, к чему сознательно стремился автор её. Он, действуя в своей книге «не рассказом, а показом» и заявляя, что «всяк

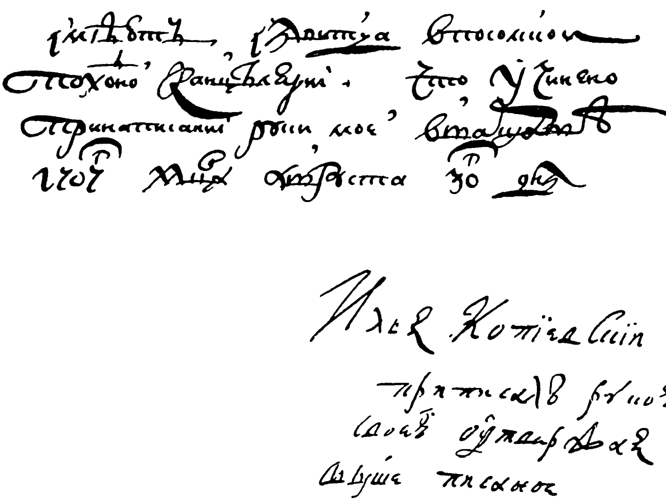


Рис. 99. Подпись (1707) Ильи Копиевского, автора первого учебника арифметики на русском языке, напечатанного в 1699 г. в Амстердаме.

усердствуя может... недоумение, каким числительным узлом заплетённое, расплести», подчёркивает «что сам себя всяк может учить».

Дальнейшая судьба Магницкого полностью связана с московской школой для подготовки кадров только что зародившегося русского флота — важного звена петровских реформ. Учить будущих моряков Петром был приглашён не видавший моря самоучка Магницкий. Это было столь же смело, как мысль о подготовке моряков в Москве, где ещё не существовало «московского моря». В своих воспоминаниях в доброжелательно юмористической форме адмирал П. В. Чичагов (1767—1849), бывший морской министр, представитель фамилии, давшей несколько поколений адмиралов, пишет: «Воспитание отец мой получил в морском училище («школе навигацких наук»), учреждённом Петром I в Москве, в старой Сухаревой башне, **немного высоко и далеко от моря»** («Архив адмирала П. В. Чичагова», изданный правнуком его Л. М. Чичаговым, вып. I, Спб., 1885, стр. 47).

История вполне оправдала этот на первый взгляд странный выбор Петра.

Задумав реформу военно-морского дела в России, Пётр в 1698 г. в Лондоне, где встречался с другом Ньютона астрономом

Рис. 100. Сухарева башня.

и математиком Галлеем, просил указать ему способного и знающего преподавателя математических и навигационных наук. Такой человек нашёлся в лице профессора математики Андрея Фархварсона (или Фархвардсона, а в некоторых источниках называемого и Фергюсоном), слывшего на родине хорошим математиком, астрономом и знатоком морских наук. Выбор этот был очень удачным, чего нельзя сказать о приглашении для преподавания практических частей навигации Стефана Гвина и Ричарда Грейса.

24 января 1701 г. появился указ Петра: «...быть математических и навигацких, то есть мореходных хитростно наук учению.

Во учителях же тех наук быть Английские земли урождённым математической — Андрею Фархварсону, навигацкой — Степану Гвыну да рыцарю Грызу; и ведать те науки всяким в снабдении управлением во Оружейной палате боярину Фёдору Алексеевичу Головину с товарищи».

Для школы была отведена Сухарева башня[1] со всеми её строениями и землями и на содержание школы была назначена большая сумма — 22 459 рублей 6 алтын и 5 денег ежегодно; жалованье преподавателям было назначено такое же, как и в Славяно-греко-латинской академии (150 рублей); один только Фархварсон получал 250 рублей (ректор академии — 300 рублей). Ученики школы получали содержание в 3—4 раза больше, чем студенты академии.

Поступившие в школу ученики начинали учение с «русской школы», т. е. школы грамоты. В следующем классе — «цыфирной школе» — проходили арифметику. Ученики низших сословий с окончания этого класса поступали на службу писарями, помощниками архитекторов, аптекарей и т. д. Ученики из дворянского сословия переходили в высшие классы, где изучали геометрию, тригонометрию и их приложения к геодезии и мореплаванию, навигацию, основы астрономии.

Математико-навигацкая школа находилась, как сказано было в указе, в ведении боярина Головина «с товарищи». Из этих «товарищей» главным был Алексей Александрович Курбатов, выдвинувшийся из крепостных Шереметева при Петре своим проектом введения гербовой бумаги. По сведениям, сообщаемым историком С. М. Соловьёвым, Курбатов настоял на том, что право на издание арифметики было отнято у некоего иностранца. В доме Курбатова Магницкий и писал свою арифметику, которая, по словам Курбатова, «вышла гораздо лучше иноземной». Магницкий был назначен преподавателем школы с жалованьем в 90 рублей в год. Сохранились расписки Магницкого в получении со 2-го февраля 1701 г. по 1 января 1702 г. по 5 алтын в день кормовых денег за составление арифметики.

Курбатову удалось ослабить в школе роль иностранцев, на которых в Москве смотрели косо в русских кругах. Отсюда возникли недоразумения между англичанами и Магницким. О них говорит письмо Курбатова к Головину от 1703 г.

«По 16 июля прибрано и учатся 200 человек. Англичане учат их той науке чиновно, а когда временем и загуляются, или, по своему обыкновению, почасту и долго проспят. Имеем, по приказу милости твоей, определённого им помоществователем Леонтия Магницкого, который непрестанно при той школе бывает и

[1] Башне было дано это название Петром I для увековечения имени стрелецкого полковника Лаврентия Сухарева, который с полком своим, оставшись верным Петру, охранял его в Троицкой Лавре и в Преображенском селе. Полк был поселён по Земляному валу в Стрелецкой слободе («Московские ведомости», 1836, № 57).

всегда имеет тщание не токмо к единому ученикам в науке радению, но и ко иным к добру поведениям, в чем те англичане, видя в школах его управление не последнее, обязали себя к нему, Леонтию, ненавидением, так что уже просил он, Леонтий, от частого их на него гневоимания от школы себе свободности; однако ж я, ведая, что ему их ради гневоимания от школы свободному быти не доведётся, приказал ему о всяких поведениях сказывать до приезда вашей милости мне, и я, приусматривая, что он приносит о порядке совершенном, призывал их в палату и сам к ним ездя по часту, говорю; а дело из них признал я в одном Андрее Фархварсоне, и те два, хотя и навигаторы написаны, только и до Леонтия наукою не дошли».

Эту картину дополняет выдержка из другого письма Курбатова к Головину в том же, 1703 г.: «Точно доложу о сем, что учители учат нерадетельно, а ежели бы не опасались Магницкого, многое бы у них было продолжение, для того, что которые учатся остропонятно, тех бранят и велят дожидаться меньших» (Соловьёв, XV, 2).

Из всего этого видно, что роль Магницкого в новооткрытой школе была значительно больше, чем это можно было бы думать по занимаемой им скромной должности учителя «русской школы». По-видимому, школа фактически держалась на Магницком.

В. Киприанов-сын в 1725 г. в ходатайстве о разрешении ему открыть типографию пишет, что в 1706 г. «тщанием и трудами» его отца была открыта типография, в которой под надзором «арифметической, геометрической и тригонометрической наук профессора Леонтия Магницкого печатались: арифметика, логарифмы, многие картины и глобусы, ландкарты, календари и другие разные листы и книги». Из этого видно, что Магницкий не был только учителем начального класса школы. Найденные в Архиве древних актов тетради учащихся навигацкой школы по сферической тригонометрии по всей вероятности являются записями и оформлением уроков Магницкого.

В 1715 г. Фархварсон и Гвин были переведены в Петербург в Академию морской гвардии, Магницкий же остался в Москве

Для учеников математико-навигацкой школы и писал свою «Арифметику» Магницкий. Дальнейшая его учебно-литературная деятельность нашла место в коллективных изданиях преподавателей математико-навигацкой школы. Так, в том же, 1703 г. были изданы анонимные «Таблицы логарифмов, и синусов, тангенсов, секансов к научению мудролюбивых тщателей», напечатанные славянским шрифтом, но с исключительным употреблением арабских цифр. В 1716 г. вышло второе издание таблиц с несколько изменённым заглавием и добавлением к нему: «со изъяснением удобнейшим: оных довольством возможно разрешить вся треугольники прямолинейные, и сферические и множайшие вопрошения астрономические».

В этом издании указано, что оно составлено «тщанием и за

Рис. 101. Титульный лист таблиц синусов и логарифмов Андрея Фархварсона, Стефана Гвина и Леонтия Магницкого.

свидетельством мафематиконавигацких школ учителей Андрея Фархварсона, Стефана Гвына и Леонтия Магницкого».

В 1722 г. вышли, опять-таки «тщанием учителей Андрея Фархварсона да Леонтия Магницкого», «Таблицы горизонтальные, северные и южные широты» — пособие для моряков.

Магницким составлена «Записка Леонтия Магницкого по делу Тверитинова», характеризующая взгляд Магницкого, но не имеющая отношения к математике.

Арифметика Магницкого была написана прежде всего как учебник для учеников математико-навигацкой школы, будущих моряков. Эта целеустановка книги выразилась в присоединении к книге третьей части второй книги, носящей заглавие «О земном обще размерении и яже к мореплаванию принадлежит». Она содержит основы мореходной астрономии и навигации с необходимыми таблицами и задачами.

Вся книга Магницкого, представляющая энциклопедию основных знаний по математике его времени, напоминающая во многих отношениях подобную же книгу итальянского самоучки Тартальи, содержит арифметику, основы алгебры, сведения по геометрии, тригонометрии и мореходной астрономии. О содержании и методических приёмах её было многократно указано в предыдущих главах.

Характерно для Магницкого стремление научить читателя использованию даваемых знаний, почему почти все главы теории сопровождаются «прикладами ко гражданству потребными»: задачами на правила «кумпанств» (пропорциональное деление прибылей), смешения, геометрические задачи на военные и морские темы, вычисление времени и прочее. Рядом с этим через всю книгу проходит идея пропаганды науки, в то время имевшая большое значение.

Об Архимеде и Пифагоре, изображённых на титульном листе книги, Магницкий пишет (см. рисунок):

Архимедес же ту (тут) представлен,
Древний философ велик явлен,
Где с ним и другий равный ему
Лицу представлен есть твоему.
Оный Архимед и Пифагор...
Равно по водам излияша,
Многи науки в мир издаша.
Елицы (которые) же их восприяша
Много си (себе) пользу от них взяша

Далее Магницкий внушает читателю:

Арифметика обычная (первая часть книги),
В купецких делах случайная
Цену товаров обретати
И достойную исчисляти
Не точию (только) тому чину (кругу),
Но и всем людем требна выну (ныне):
Ремесленником и художным,
Подданным всяким и вельможным.

Математику должен изучать

И хотяй (хотящий) быть морской пловец.
Навигатор ли или гребец...
Ныне бо и всяк лучший воин
Ону науку знать достоин.

. . . .

Говоря многократно о пользе арифметики, Магницкий при этом подчёркивает, что она ценна не только тем, что решает задачи практической жизни, но и тем, что «просвещает ум ко приятию множайших наук и высочайших».

Таковы установки «Арифметики» Магницкого, о которой правильно было сказано, что нет другой книги, имеющей равное с ней значение в истории русского математического просвещения (Бобынин).

Современная русская математика ушла далеко от «Арифметики» Магницкого. Может показаться, что нет достаточного основания в наши дни говорить о значении Магницкого и его трудов. Склоняющимся к такому взгляду можно напомнить рассказ К. А. Тимирязева о посещении им вместе с известным американским дарвинистом домика Дарвина в Кембридже. Встретили они там бывшего камердинера Дарвина и получили от того комичную характеристику великого учёного: «Барин был неплохой, только не деловой: уставится на какую-нибудь букашку и смотрит минут десять — это не дело!» Американец просил разъяснить ему, каким образом удаётся в Англии получать такой прекрасный, густой газон, какой имелся перед домиком Дарвина, в то время как в Америке на газоне растёт трава редкая, совсем не похожая на английскую. Старик разъяснил, что этой беде легко помочь: надо завести машинку и стричь лет 200—300, после чего газон будет прекрасный. К. А. Тимирязев указывает, что старик дал прекрасную сравнительную характеристику английской и американской культур.

Значение Магницкого для современной русской математики заключается в том, что он 250 лет назад начал «стрижку», создавшую тот «газон», на котором стали возможны «собственные невтоны». Из «посева» Магницкого выросли Ломоносов, русская математическая культура, русская морская наука.

Отметим в заключение, что деятельность Магницкого не ограничивалась педагогической и литературной работой. Он активно участвовал в государственном строительстве своего времени. В «Исторических известиях Тверского княжества, почерпнутых из общих российских летописцев с приобщением новейших оного приключений», составленных Д. И. Кармановым (1775 г.) и перепечатанных в г. Твери в 1893 г. («Собрание сочинений, относящихся к истории Тверского края»), читаем:

«Пётр I имел намерение сию крепость (Тверь) привести в хорошее и оборонительное состояние и для того в 1707 г. прислан был в Тверь математических и навигацких наук учитель Леонтий Магницкий с планом, который через наряженных... работников, коих было 4425 человек, в три месяца вся поправил и наделал больверки».

В 1703 г. Пётр, желая облегчить доставление войску провианта натурой, тяжёлым бременем лежавшее на крестьянах, учредил особых комиссаров, на обязанности которых лежало снабжение войска провиантом. В числе лиц, назначенных для наблюдения за правильностью расходов по покупке провианта, был между другими и Л. Магницкий. Эта должность едва не подвергла его опасности. За поставку провианта для войска взялись многие сильные и знатные люди, скупавшие под чужим именем хлеб по провинциям и поставлявшие его по высокой цене, сговорившись с комиссарами. В связи с этим возникло следствие. В числе арестованных оказался и Магницкий. Об этом имеется сообщение самого Магницкого: «и привезли меня, Магницкого, под караулом в Питербурх, по которому делу рассмотрел сам государь и ничто же либо над ним обрел, токмо ему великая турбация и страх и убытки учинилися, а держан Магницкий под караулом точно день един и имянным указом освобождён» («Записка Леонтия Магницкого по делу Тверитинова», «Памятники древней письменности», Пб., 1882, стр. 21).

Рис. 102. Памятник на могиле Леонарда Эйлера в Ленинградском Некрополе.

В разное время Магницкий исполнял и другие правительственные поручения, которые показывают, что Пётр имел высокое мнение не только о его познаниях, но и честности. Так, в 1733 г. Магницкий управлял московской академической конторой, доставлял в Коллегию отчёты, получая за это в год 260 рублей жалованья («Русский вестник», февраль, 1871, стр. 705).

Эти сведения о деятельности Магницкого, которые обычно отсутствуют в имеющихся биографиях его, характеризуют автора «Арифметики» как активного деятеля и вне педагогической сферы.

Л. ЭЙЛЕР

В 1725 г. была открыта в Петербурге Академия наук. В числе первых учёных работников новой академии в области математических наук был Леонард Эйлер, который является одним из величайших математиков не только XVIII в., но и последующих времён. В своих работах, число которых доходит до 1000, он вносит новые идеи во многие области математики и для ряда математических наук является основоположником.

Эйлер родился 15 апреля (нового стиля) 1707 г. в Швейцарии, близ г. Базеля. В Базельском университете он учился под руководством известного математика Иоганна Бернулли (1667—1748) и получил в 16-летнем возрасте учёную степень магистра. В 1727 г. Эйлер приезжает в Петербург, где становится со временем профессором физики, а с 1733 г. — математики в Академии наук.

В 1741 г. Эйлер переезжает в Берлин, где занимает пост руководителя математического отделения Академии наук, не прерывая связей с Петербургской академией. Состоя ее почётным членом, он продолжает печатать в изданиях последней свои труды, руководит молодыми русскими учёными, направляемыми к нему для усовершенствования. В 1766 г. Эйлер возвращается в Петербург, где продолжает работать до своей кончины, последовавшей 18 сентября 1783 г.

Эйлер известен во всех областях математических наук. «Теоремы Эйлера», «числа и точки Эйлера», «уравнения Эйлера», «формулы Эйлера» и т. д. встречаются во всех математических дисциплинах. Он применяет математику в самых различных областях знания: в теории звука, света, магнетизма, механики, астрономии, географии. Ему принадлежат основоположные труды по кораблестроению и кораблевождению, теории стрельбы, теории упругости, механике жидких тел (он основатель науки гидродинамики), по движению небесных тел, теории музыки и во многих других областях.

В высшей математике Эйлер дал основной её области — анализу — то строение, которое сохранилось в значительной части до настоящего времени. Чрезвычайно много внимания он уделял теории чисел, в которой многие разделы ведут своё начало от работ Эйлера. В полном собрании сочинений Эйлера, ныне издаваемом и составляющем по предварительным расчётам свыше 70 больших томов, работы по теории чисел (высшей арифметике) займут несколько томов. Достижения Эйлера в теории простых чисел и во многих других областях упоминались неоднократно на страницах этой книги.

Эйлер не только не чуждался составления руководств по элементарной математике, но дал замечательные учебники, послужившие образцами для позднейших авторов в течение столетия.

На некоторых работах, хотя бы в порядке краткого библиографического перечисления, остановим внимание читателя.

«Универсальная арифметика Эйлера, переведена с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцевым (впоследствии академиком) и Иваном Юдиным. Том первый, содержащий в себе все образы алгебраического вычисления. Издана в Санкт-Петербурге при Императорской Академии наук, 1768».

«Универсальная арифметика (те же переводчики), том второй, в котором излагаются правила решения уравнений. Издана в Санкт-Петербурге при Императорской Академии наук, 1769».

Затем были изданы: второе тиснение первого тома, 374 страницы, 1787; второе тиснение второго тома, 530 страниц, 1788.

Немецкое издание алгебры Эйлера: Leonhard Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra. St.-Petersburg, 1802, XVI + 530 страниц.

«Оснований алгебры Леонарда Эйлера части первой первые три отделения, переведённые с французского языка на российский, со многими присовокуплениями, Василием Висковатовым, Академии наук экстраординарным академиком Санкт-Петербург, печатано при Императорской Академии наук, 1812, VI + +710 страниц».

«Геометрия для употребления в академической гимназии. Сочинение Леонарда Эйлера. Перевод с латинского с фигурами. Санкт-Петербург, 1765». (Печатный экземпляр книги неизвестен.)

Особенный интерес для нас представляет охарактеризованный в обзоре учебник арифметики. Книга была Эйлером написана на немецком языке и напечатана под заглавием: Einleitung zur Rechen-Kunst, zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften in St.-Petersburg (Введение в искусство счёта, для употребления в гимназии при Императорской Академии наук в С.-Петербурге). Erster Theil, 1738, VIII+277 страниц, Zweiter Theil, 1740, 29+228 страниц.

Перевод этой книги на русский язык был представлен в академию переводчиком адъюнктом Адодуровым в марте 1737 г., но в свет появился позднее под заглавием **«Руководство к арифметике** для употребления в гимназии при Императорской Академии наук, переведено с немецкого чрез Василья Адодурова, Академии наук адъюнкта. В Санкт-Петербурге, 1740, 312 страниц».

Под тем же заглавием, но в переводе «Академии наук студента Василья Кузнецова», была издана вторая часть немецкого оригинала в 1760 г.

Педагогическое и методическое мастерство Эйлера может быть охарактеризовано следующим фактом.

На немецком языке существует издание «Универсальная библиотека Реклама» (Universal-Bibliothek von Reclam), которое за крайне дешёвую цену (12 коп. за томик) выпустило много тысяч всевозможных книг по литературе, философии, истории и т. д. для самого широкого круга читателей. В этой серии содержится одна единственная математическая книга — «Руководство к алгебре Леонарда Эйлера». Существует рассказ о том, что под диктовку ослепшего Эйлера его алгебру записывал малограмотный его камердинер. В результате он усвоил алгебру.

Эйлер десять раз получал премии Парижской Академии наук за свои труды, равно как крупные суммы от английского и французского правительств за работы, имевшие большое значение для кораблестроения и навигации. Русское правительство оказывало ему в Петербурге и в Берлине всяческие, материальные и нематериальные, знаки признания. Свою вторую родину Россию Эйлер искренно любил, поддерживал всемерно своих русских учеников, высоко ценил своего друга М. В. Ломоносова.

П. Л. ЧЕБЫШЕВ

Пафнутий Львович Чебышев родился 16 мая (по новому стилю) 1821 г. в родовом имении родителей в Калужской губернии. Получив домашнее образование в Москве у лучших тогдашних учителей (математике учил его известный педагог П. Н. Погорельский), Чебышев в 1837 г. поступил в Московский университет, который окончил в 1841 г. первым кандидатом, получив се-

Рис. 103. Фотоснимок бронзовой мемориальной доски на могиле П. Л. Чебышева в селе Спас на прогнаньи.

ребряную медаль за работу «О числовом решении алгебраических уравнений». Из университетских преподавателей на Чебышева оказал наибольшее влияние профессор механики Н. Д. Брашман, которого всю жизнь он вспоминал с теплотой и благодарностью. В связи с голодом, постигшим Россию в 1841 г., материальное положение родителей Чебышева ухудшилось. Они не могли обеспечить сына средствами даже в той степени, как во время пребывания его в университете в качестве студента. Молодому кандидату нужно было самому добывать средства к существованию. Однако он на службу не поступал, а, терпя некоторые лишения, готовился к магистерским экзаменам, которые выдержал в конце 1843 г. В 1846 г. Чебышев защитил диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» на степень магистра и в 1847 г. получил место адъюнкта (доцента) в Петербургском университете. Здесь он в 1849 г. защитил диссертацию на степень доктора. Эта диссертация на тему «Теория сравнений» до сих пор остаётся одним из основных пособий по теории чисел.

В 1850 г. Чебышев избирается профессором Петербургского университета, в 1853 г. — адъюнктом Академии наук и в 1856 г.— академиком.

За последующие работы в области теории чисел, интегрального исчисления, прикладной механики, теории вероятностей, теории приближения функций Чебышев был избран членом-корреспондентом очень многих академий наук, в том числе членом Парижской академии, и пользовался мировой славой. Начиная с 1856 г. он в течение 17 лет состоял членом учёного комитета министерства народного просвещения, оказывая большое влияние на постановку преподавания математики в русской школе. В течение 40 лет Чебышев состоял членом военно-учёного комитета, много содействуя развитию артиллерийской науки в России. Он получил много знаков отличия как российских, так и иностранных, и едва ли не единственным из русских учёных имел высший в России чин действительного тайного советника, который соответствовал высшему генеральскому чину. Самые известные зарубежные учёные признавали его самым выдающимся математиком своего времени. К отзывам, приведённым в этой книге, можно добавить слова выдающегося французского математика того времени Эрмита: «Все члены нашей академии присоединились ко мне, уверяя, что Вы являетесь гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времён».

Характерной чертой научного творчества Чебышева было постоянное сочетание теории с практикой. Он считал, что «сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием её; она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных». Так изучение действий ветряных мельниц и заводских установок привело Чебышева к совершенно новым вопросам математики, которые могли быть решены только созданной им теорией функций, наименее отклоняющихся от нуля. Этой области математики в настоящее время посвящается очень много работ во всех странах. Оправдались слова академиков А. А. Маркова и Н. Я. Сонина в некрологе Чебышеву:

«Ввиду оригинальности исследований Чебышева ему редко приходилось упоминать о чужих исследованиях. Зато другие учёные всё чаще и чаще упоминают о нашем славном сочлене и черпают свои идеи из той богатой сокровищницы мыслей, которую представляют труды Чебышева. Труды его носят отпечаток гениальности. Он изобрёл новые методы для решения многих трудных вопросов, которые были поставлены давно и оставались нерешёнными. Вместе с тем он выдвинул ряд новых важных вопросов, над разработкой которых трудился до конца своих дней».

Среди работ Чебышева, доставивших ему мировую славу, были работы, относящиеся к арифметике целых чисел. В двух своих работах 1849 и 1852 гг. он выводит формулу, дающую весьма точное приближённое значение количества простых чисел между 1 и n в натуральном ряду; это количество обозначается символом $\pi(n)$: $\frac{\pi(n)}{n} \approx \frac{0,43429}{lg_{10} n}$.

В работе 1850 г. Чебышев доказал постулат Бертрана, утверждающий, что между числом n и $2n-2$, начиная с $n = 4$, содержится по меньшей мере одно простое число.

Скончался П. Л. Чебышев в Петербурге 8 декабря (нов. ст.) 1894 г. и погребён в родовом имении Чебышевых в селе Спас на Прогнаньи в 90 километрах от Москвы по Киевской железной дороге. Название села напоминает о том, что с этого места началось отступление французской армии в 1812 г.

ПЬЕР ФЕРМА

Пьер Ферма́ родился в 1601 г. (умер 12 января 1665 г.). Юрист по образованию, он с 1631 г. состоял советником парламента г. Тулузы, свободное от занятий время посвящая математике. Он является одним из основоположников высшей математики. Своих работ он не издавал, а лишь сообщал некоторые результаты своим друзьям, таким же любителям математики, как он сам.

Пьер Ферма.

Он обычно записывал свои достижения на полях читавшихся им книг или на клочках бумаги, которые сохранились далеко не все.

Особый интерес Ферма питал к теории чисел. В качестве примера одной из таких теорем, сформулированных Ферма, рассмотрим легко доказываемое его утверждение о свойстве простого числа.

Простое число n, большее 2, может всегда быть представлено в виде разности квадратов двух целых чисел и притом лишь единственным образом.

Положим, что $n=x^2-y^2$, т. е. $n=(x+y)\ (x-y)$. Так как n простое число, то его можно представить в виде произведения только как $n\cdot 1$. Итак, $n\cdot 1=(x+y)(x-y)$.

Этому равенству в целых числах можно удовлетворить только при условии, что $x+y=n$, $x-y=1$. Складывая и вычитая эти равенства почленно, получим:

$$x=\frac{1}{2}(n+1), \qquad y=\frac{1}{2}(n-1).$$

Так как n, как простое число, большее 2, есть число нечётное, то x и y числа целые.

Пример: $n=19$, $x=\frac{1}{2}(19+1)=10$, $y=\frac{1}{2}(19-1)=9$; $n=10^2-9^2=100-81=19$.

Если n нечётное составное число, то оно может быть представлено в виде разности квадратов целых чисел более чем одним способом: Пример:

$$n=15=15\cdot 1=5\cdot 3=x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

Принимая $x+y=15$, $x-y=1$, получим: $x=8$, $y=7$,

$$x^2-y^2=8^2-7^2=64-49=15.$$

Принимая $x+y=5$, $x-y=3$, имеем: $x=4$, $y=1$,

$$x^2-y^2=4^2-1^2=16-1=15.$$

Число 15 может быть представлено в виде разности квадратов двумя способами.

Многим теоремам, высказанным Ферма, были найдены впоследствии доказательства, иногда после долгих усилий таких великих математиков, как Эйлер, Лагранж, Гаусс. Доказательства эти часто очень сложны и выходят за пределы элементарной математики.

Особенной известностью пользуются следующие из них.

Малая теорема Ферма. Если p простое число и n и p — числа взаимно простые, то $n^{p-1}-1$ делится на p.

Примеры. Пусть $n=2$, $p=3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 17$;

p	3	4	5	6	7	11	13	17
2^{p-1}	$2^2=4$	$2^3=8$	16	32	64	1024	4096	65 536
$2^{p-1}-1$	$2^2-1=3$	$2^3-1=7$	15	31	63	1023	4095	65 535

$n=3$; значения p те же.

p	2	3	4	5	7	11
3^{p-1}	3	9	27	81	729	59 049
$3^{p-1}-1$	2	8	26	80	728	59 048

Таблицы подтверждают, что число $n^{p-1}-1$ делится на p, когда p простое число и n и p числа взаимно простые. В первой таблице при $n=2$ и $p=4$ или 6, $2^{p-1}-1$ равно соответственно числам 7 и 31, не делящимся на p (4 и 6); во второй таблице при $n=3$ и $p=3$ и 4, $2^{p-1}-1$ равно соответственно числам 8, 26, которые не делятся на p (3 и 4).

Число n при этом может быть и составным, но взаимно простым с p: если $n=10$, а $p=3$, имеем:
$10^{3-1}-1=10^2-1=100-1=99$ и делится на 3.

О малой теореме Ферма и её доказательстве смотри: Г. Н. Берман, Число и наука о нём, М., 1954, стр. 116.

Теорема была обобщена Эйлером.

Великая теорема Ферма. На полях сочинений Диофанта, на том месте, где говорится о возможности удовлетворить равенству $x^2+y^2=z^2$ целыми значениями для x, y и z (например, значениями $x=3$, $y=4$, $z=5$), Ферма написал, что он нашёл удивительное доказательство того, что в случаях, когда показатель степени x, y и z больше 2, x, y и z не могут быть целыми числами, но что он не может записать этого доказательства вследствие недостаточности места. Разными математиками были даны доказательства этого утверждения Ферма для отдельных значений показателя, в частности Эйлером для третьей и четвёртой степеней неизвестных, но в общем виде для любой целой степени неизвестных утверждение Ферма до настоящего времени остаётся недоказанным.

В 1909 г. немецкий инженер П. Вольфскель внёс в Геттингентское научное общество 50 000 золотых марок (около 30 000 золотых рублей), которые должны быть выданы лицу, доказавшему теорему Ферма. Это обстоятельство усилило приток попыток доказательства, но никакого успеха в доказательстве теоремы в общем виде оно не дало.

Не менее известна еще одна теорема Ферма. Он высказал, хотя не совсем уверенно, утверждение, что выражение $2^{2^n}+1$ при всяком целом положительном значении n, включая и $n=0$, даёт простое число.

Утверждение это верно при $n=0$, 1, 2, 3, 4, как легко проверить:

n	0	1	2	3	4
$2^{2^n}+1$	3	5	17	257	65 537

При $n=5$ $\qquad 2^{2^n}+1=4\,294\,967\,297.$

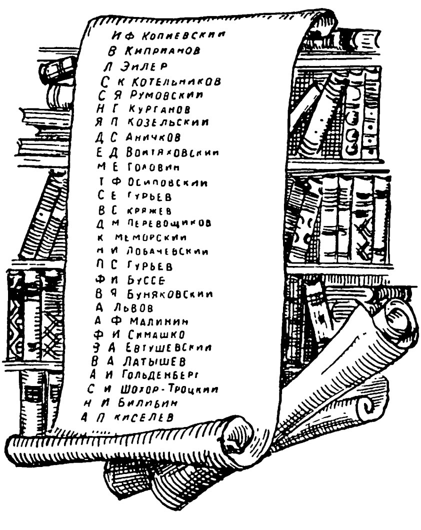
Эйлер нашёл, что это число не простое, а делится на 641. Это можно было найти при помощи элементарной алгебры (см. И. Я. Депман, Метод математической индукции, 1957).

Предложение, высказанное Ферма, которое он сопроводил указанием, что ему пока не удалось найти простого для него доказательства, оказалось ошибочным. Оно, по-видимому, было сделано по аналогии на основании пяти наблюдений (при $n=0$, 1, 2, 3, 4), в которых утверждение верно. Этот пример ошибки Ферма ещё раз предупреждает, что нельзя делать на основании некоторого числа наблюдений вывод, относящийся к случаям, выходящим из ряда наблюдаемых. На математическом языке это означает, что нельзя делать общих выводов неполной индукцией, а надо применять метод математической индукции.

Гаусс доказал, что правильный p-угольник, где p простое число, можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $p=2^{2^n}+1$ при n целом положительном (включая и 0). Первым большим открытием Гаусса в математике было построение циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника. Автору было в это время 18 лет.

В настоящее время известны только пять простых чисел вида $2^{2^n}+1$, приведённые в нашей таблице.

ДЕЯТЕЛИ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РОССИИ



Из предыдущего известно, что первым печатным руководством арифметики на русском языке было «Краткое и полезное руковедение во аритметыку» И. Ф. Копиевского, изданное в Амстердаме в 1699 г. За ней в 1703 г. последовала «Арифметика, сиречь наука числительная» Л. Ф. Магницкого. В 1705 г. типографщик В. Киприанов издал плакат «Новый способ арифметики феорики или зрительныя» (наглядная арифметика). В 1740 г. вышла в свет первая часть «Руководства к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук» Л. Эйлера, в переводе с немецкого В. Е. Ададурова.

О всех этих первенцах печатной русской арифметической литературы были даны необходимые сведения в разных местах книги.

Для полноты исторической картины познакомимся с основными русскими руководствами и научными трудами по арифметике и их авторами, продолжавшими развитие математической науки и, в частности, арифметики.

Василий Евдокимович Ададуров.

С. К. КОТЕЛЬНИКОВ

Симеон Кириллович Котельников (1723—1806) был вторым по времени, русским по национальности, членом Петербургской Академии наук по математике (с 1751). Первым был В. Е. Ададуров (с 1733), в математике, кроме переводов, никаких следов не оставивший и вскоре перешедший на административную работу.

Ученик академика Рихмана и затем Эйлера, давшего высокую оценку его способностям, Котельников написал ряд работ по механике и геометрии, учебники по механике и геодезии и в

Симеон Кириллович Котельников.

1766 г. издал книгу **«Первых оснований математических наук часть первая, содержащая в себе арифметику».**

Стремление автора было «предложить и доказать всё кратко, сколько возможно, и ясно, сколько дозволяет краткость». В книге излагается арифметика целых и дробных чисел (последние в буквенном обозначении), разные правила прежних учебников (в том числе одного и двух ложных положений), степени, корни, прогрессии, ряды и логарифмы. В «Арифметике» Котельникова чувствуется бо́льшее влияние учебников Вольфа, чем Эйлера.

С. Я. РУМОВСКИЙ

Академик-астроном Степан Яковлевич Румовский (1734—1812), помимо работ по астрономии и высшей математике, напечатал в 1760 г. **«Сокращения математики, часть первая, содержащая начальные основания арифметики, геометрии и тригонометрии».**

Арифметике, содержащей те же разделы, что и книга Котельникова, посвящено 157 страниц. Автор указывает, что он следовал при составлении книги пожеланиям и утверждениям члена-корреспондента Петербургской академии Сегнера, работавшего в Германии (венгерского учёного), и стремился все правила снабдить доказательствами. С первых страниц вводятся одновременно понятия о целых и дробных числах; действия над дробями излагаются в особой главе, которой предшествует глава об отношениях и пропорциях, а свойствами их обосновываются действия над дробями. Значительное место отведено извлечению квадратных и кубических корней. Для нахождения среднего пропорционального двух чисел, произведение которых не есть полный квадрат, на примере показывается, как «извлечь корень квадратный, который бы без чувствительной погрешности за истинный принять можно было»; корень этот записывается без дальнейших объяснений в виде десятичной дроби. Так же пишутся и логарифмы, хотя объяснения действий над десятичными дробями в книге нет. Понятие логарифма вводится сопоставлением прогрессий

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32\ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5\ldots \end{array}$$

и указанием: «числа, внизу написанные, называются верхних логарифмами». Далее указывается, что обе прогрессии могут приняты быть «по произволению», почему «разные таблицы логарифмов сочинить можно, но во всех логарифм единицы должен быть нуль»[1]. Показав на примере вычисления $\log_{10} 5$, как можно составить таблицу логарифмов, Румовский ограничивается применением логарифмов к решению задачи на сложные проценты, добавляя, что «употребление логарифмов довольно видно будет из тригонометрии». Без всякого пояснения автор вводит арифметические прогрессии и отрицательные члены, продолжая прогрессию 12, 9, 6, 3, 0 дальше в виде —3, —6, —9 . . . Как видно, обоснования **всех** правил, несмотря на своё обещание, автор не даёт. Различные правила для решения конкретных задач у Румовского занимают значительно меньше места, чем у западных авторов.

Степан Яковлевич Румовский.

Н. Г. КУРГАНОВ

Николай Григорьевич Курганов (1725 (6) — 1796), ученик Магницкого, профессор морского корпуса, переводчик и составитель разных мореходных и астрономических трудов, был популярным писателем XVIII в. благодаря много раз переиздававшемуся «Письмовнику». «Письмовник», называвшийся вначале «Российскою универсальною грамматикой», приобрёл популярность как собрание занимательных анекдотов и пословиц, помещённых рядом со всевозможными полезными знаниями из различных областей науки и производства. Личностью его интересовался Пушкин, что придало имени Курганова популярность и в XIX в.

В 1757 г. Курганов издал **«Универсальную арифметику»** (энциклопедию элементарной математики), а в 1771 г. книгу **«Арифметика или числовник,** содержащий в себе все правила цыфирного вычисления, случающегося в общежитии, в пользу всякого учащегося воинского, статского и купеческого юношества». Вторая книга представляет изменённую арифметическую часть первой, из которой исключены алгебраические (буквенные) выкладки, как «трудные для начинающих учение». Румовский писал, что математические книги бывают двух родов: в одних даются правила без доказательств, изъясняемые одними примерами, в других «сверх того, доказательства и всякого действия причины».

---

[1] Здесь у автора неточность: только основание (знаменатель) первой прогрессии можно взять произвольно, вторая остаётся неизменной.

Автор считал вторую точку зрения правильной и пытался доказать её в своей книге.

Как бы в ответ на заявление Румовского Курганов указывает, что «начинающему учиться молодому отроку, по слабости разума больше пользы принесть может употребление таких книг, в коих есть одни правила, изъясняемые примерами и утверждённые по-

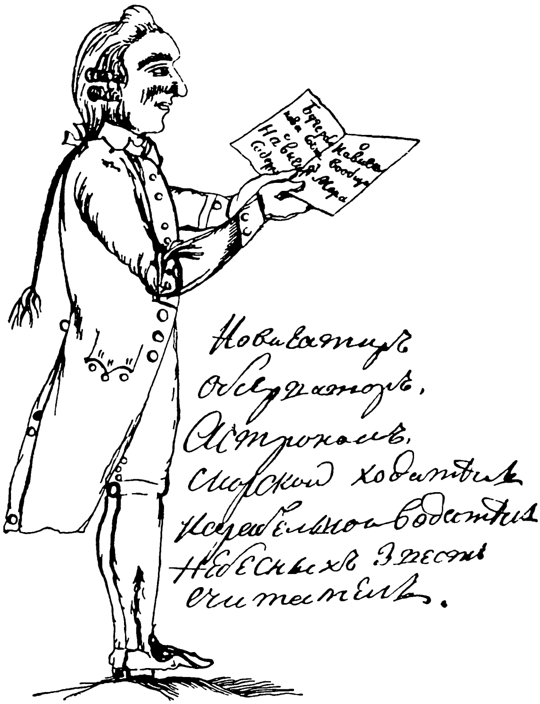


Рис. 104. Н. Г. Курганов. (Дружеский шарж ученика.)

верением». Курганов считает, что «правила счисления, случающиеся в общежитии, заслуживают больше уважения, нежели содержащиеся в арифметике к прочим наукам основания, расположенные математическим способом, каковы суть евклидовы элементы».

Арифметика Курганова, сохраняя частично дух Магницкого, значительно ближе к современному учебнику. Изложение нумерации (включая римскую и славянскую), действий над целыми числами и дробями только некоторыми способами записи (иногда не лишёнными интереса) отличается от современного. В книге даётся нахождение наибольшего общего делителя последовательным делением. Десятичные дроби излагаются в особом разделе и несравненно основательнее, чем у Магницкого. Подробно Курганов излагает арифметику именованных чисел, что понятно по его принципиальной установке. Учение о степенях, отношениях и пропорциях, корнях, прогрессиях и логарифмах по содержанию соответствует книге Румовского, однако всё у Курганова значительно более обоснованно. Тройное правило Курганов называет также «золотым, ради великия его пользы и пространного употребления во всяких мирских исчислениях», но применяет его не механической «строкой», как Магницкий, а, по существу, при помощи пропорций. Во всех разделах Курганов даёт конкретные задачи, а в конце книги «задачи утешные», которые почти все взяты у Магницкого. Книга Курганова вытеснила из широкого употребления «Арифметику» Магницкого.

* * *

Заслуживает быть отмеченным, что все упомянутые нами русские авторы книг по арифметике — выходцы из низов: Магницкий — сын крестьянина, Котельников — солдата, Румовский — сельского священника, Курганов — унтер-офицера.

Я. П. КОЗЕЛЬСКИЙ

Основные установки арифметики Курганова (избежание абстрактных доказательств, жизненность задач) были одновременно с ним высказаны Яковом Павловичем Козельским (1728—1793), преподавателем инженерно-артиллерийской школы, в его учебнике **«Арифметические предложения»** (1764). Излагая те же теоретические сведения, которые содержались в учебниках его предшественников, Козельский, автор философских трудов, уснащает арифметические объяснения философскими рассуждениями. Стараясь, с одной стороны, «по возможности не пропустить никакого правила, употребляемого в житейских нуждах», Козельский, с другой стороны, заявляет, что изучение правил неприменимых «можно по справедливости считать бесполезным и сожаления достойным умствованием ... Последние не столько пользы, сколько скуки наносят читателям и часто отвращают их от учения». «Лучше, — говорит он, — упражняться в большем числе наук, со знанием одного только в них нужного и полезного, нежели простираться в одной науке так далеко, чтобы знать и ненужное». О математических науках вообще он заявляет, что «большая часть из них доведена до такой степени... что в рассуждении нужд человеческих и в рассуждении сил человеческого разума не много что (в дальнейшем) важного изобретать можно». Так как книга Козельского вышла ранее «Числовника» Курганова, то возможно, что она оказала влияние на отмеченные выше положительные взгляды Курганова, который, однако, отбросил неприемлемые философские рассуждения Козельского. Козельский горячо ратует за соединение теории с практикой при обучении и в этом отношении его книги представляют интерес.

Д. С. АНИЧКОВ

В 1764 г. в Москве, в издании «Типографской компании»[1] вышла и по меньшей мере четыре раза переиздавалась большая книга (в издании 1786 г. 392 страницы) под заглавием «**Теоретическая и практическая арифметика** в пользу и употребление юношества, собранная из разных авторов Дмитрием Аничковым».

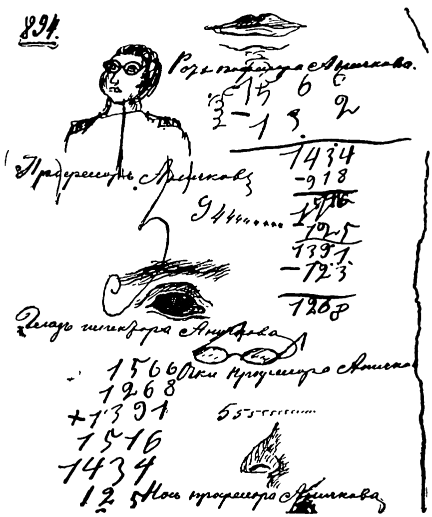


Рис. 105. Дмитрий Сергеевич Аничков (зарисовка ученика на обложке учебника Аничкова) в 1786 г.

Дмитрий Сергеевич Аничков (1733—1788) был преподавателем, «состоявших при Московском университете» гимназий с 1762 г. С 1877 г. он ординарный профессор логики, метафизики и чистой математики. В 1769 г. Аничков защищал диссертацию «Рассуждение из натуральной богословии о начале и происшествии натурального богопочитания», в которой некоторые члены совета университета усматривали материалистические взгляды. Первое изложение диссертации как будто было сожжено палачом на Лобном месте, и против автора возбуждено дело, тянувшееся до его смерти.

Книга по арифметике разрослась до необычно больших размеров не только потому, что в приложении к ней на 122 страницах даётся подробный обзор существовавших в то время мер различных стран, но и вследствие весьма обстоятельного изложения самого предмета и логических экскурсов отчасти излишних. Она начинается с философского «предуведомления о математическом способе учения», которое заканчивается таким выводом автора: «всяк, есть ли только рассмотрит с прилежанием, может видеть, что математический способ есть всеобщий и по той причине во всех науках должен употребителен быть, когда справедливое знание вещей потребно...» «О математике — по мнению автора — без сомнения заключить можно, что она острит человеческий разум и делает оный способнейшим к рассматриванию и исполнению правил истинной логики».

---

[1] «Типографическая компания» — известное издательство, созданное в 1784 г. известным прогрессивным литературным деятелем Н. И. Новиковым; деятельность её была прекращена в 1792 г. с приговорением Новикова к «нещадной» (т. е. смертной) казни, заменённой 15 годами заключения.

Подробное изложение арифметики автор во многих случаях дополняет философскими (логическими) и историческими вставками, показывающими знание им истории науки. Изложив основы нумерации, автор даёт примечание: «что ж касается до изобретателей помянутых знаков, об оных хотя многое писано, однако не согласно: иные утверждают, что оные изобретены от арабов, а Валлизий (Уоллис, Валлис)[1] доказывает, что они найдены от индейцов (индийцев), а потом от сарацын (арабов) в Гишпанию перенесены. Но кто бы оные знаки ни изобрёл, в том нужды нет; довольно того, что мы к ним с малых ещё лет привыкли. Чего ради употребление оных должны почитать всеобщим и для всех обыкновенным».

Изложение теории арифметики сопровождается практическими и часто историческими задачами. Арифметические действия выполняются обычными для нас способами; даются правила проверки действий. Термины сопровождаются соответственными латинскими. Арифметика целых чисел содержит подробное изложение теории пропорций. Все правила и свойства доказываются в виде теорем. В теоретической части книги излагаются обыкновенные и десятичные дроби, извлечение корней и логарифмы.

В практической арифметике Аничков излагает подробно тройное правило и значительно короче, чем предшествующие ему авторы, фальшивое и «девичье (слепое)» правила, заключая изложение примечанием: «Хотя по изобретении алгебры почти никакой нужды не имеем в правилах фальшивом и слепом, однако оные по большей части для того только здесь сообщены, чтоб показать, с какой трудностью древние математики, которые никакого ещё понятия об алгебре не имели, находили то, что ныне помощию оной короткое время и с меньшим трудом сыскать можно».

Е. Д. ВОЙТЯХОВСКИЙ

Большое распространение на рубеже XVIII и XIX вв. имел **«Курс математики, сочинённый артиллерии штык-юнкером[2] и математики партикулярным учителем Ефимом Войтяховским, в пользу и употребление юношества и упражняющихся в математике»**, в 5 частях, вышедший в 1787 г., а затем выдержавший ряд изданий.

Ефим Дмитриевич Войтяховский, смоленский уроженец, после 22-летней службы в артиллерии, создал в Москве математическую школу; умер около 1812 г. Войтяховский слушал в Петербурге частные лекции по математике преподавателя инженерно-

[1] Данное разъяснение в скобках и все последующие автора (И. Д.).

[2] *Штык-юнкер* — первый младший офицерский чин в артиллерии, введённый Петром I в 1712 г., соответствовавший прапорщику (ныне младший лейтенант).

артиллерийского корпуса Н. В. Верещагина и, по словам военного писателя А. В. Висковатова, без ведома Верещагина издал его лекции.

В предисловии ко II изданию «Курса» Войтяховский пишет, что он «с 1779 г. с возможным тщанием произвольно возложенную на себя должность в преподавании математических знаний российскому юношеству, усердствуя тем пользе общества, исполнял».

Первая часть курса содержит арифметику. В шестом издании (1817) 293 страницы. Включает она, как и книга Анничкова, извлечение квадратного и кубического корня, прогрессии, элементы учения о непрерывных дробях. Учение о логарифмах, имевшееся у Аничкова, Войтяховский перенёс в алгебру. Задачи на тройное правило решаются при помощи пропорций. Учение о мерах разных стран у Войтяховского занимает меньше места, чем у Аничкова.

Содержание книги вообще совпадает с книгой Аничкова. Успех её был обусловлен, по-видимому, более кратким изложением и большим числом интересных, частью занимательных задач.

М. Е. ГОЛОВИН

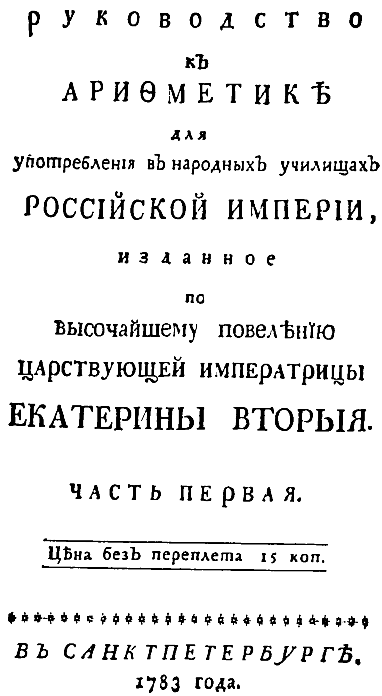
В 1786 г. был опубликован устав народных училищ, по которому должны были быть открыты в губернских городах четырёхклассные главные народные училища и в уездных городах двухклассные.

Для подготовки учителей математики для них в Петербурге уже в 1783 г. учреждено было специальное училище, носившее название учительской семинарии, в дальнейшем учительской гимназии и педагогического института[1]. Это первое в России педагогическое высшее учебное заведение. Математику в нём преподавал Михаил Евсеевич Головин (1756—1790), племянник М. В. Ломоносова, а после него его ученики П. И. Гиларовский и Т. Ф. Осиповский. Для открываемых народных училищ были изданы учебники и среди них **«Руководство к арифметике для употребления в народных училищах»** (ч. I, 1783, ч. II, 1784). Книга переиздавалась много раз до двадцатых годов XIX в.

«Руководство изложено в виде правил, иллюстрируемых примерами, и содержит арифметику целых и дробных чисел, подробное изложение именованных чисел, извлечение квадратного и кубического корня и тех же правил, которые имелись в учебнике Курганова. Более подробно, по сравнению с прежними авторами, излагаются действия над десятичными дробями. Количество материала в книге достаточно богатое для тогдашних народных

[1] Новейший обзор его истории в статье Л. Д. Додон в «Учёных записках педагогического института им. А. И. Герцена», т. 139, 1957.

училищ, а изложение в виде правил не заслуживает упрёков, так как назначение книги — являться пособием для ученика, который слушал объяснения учителя. Как курьёз можно отметить, что в книге 0 и 1 автор не считает числами, хотя все 10 знаков называет цифрами.



РУКОВОДСТВО

КЪ

АРИѲМЕТИКѢ

ДЛЯ

употребленія въ народныхъ училищахъ

РОССІЙСКОЙ ИМПЕРІИ,

изданное

по

высочайшему повелѣнію

царствующей императрицы

ЕКАТЕРИНЫ ВТОРЫЯ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Цѣна безъ переплета 15 коп.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,

1783 года.

Рис. 106. Обложка учебного пособия 1783 г.

Автором «Руководства к арифметике для употребления в народных училищах» до сих пор считался М. Е. Головин. Это утверждение оказалось неверным. Книга эта является переводом изданного на церковно-славянском и немецком языках «Руководствия ко арифметике. За употребление иллирические в малых училищах учащиеся юности» («Anleitung zur Rechenkunst. Zum Gebrauche der in den Trivialschulen lernenden nicht unirten Illyrischen Jugend», Вена, 1777). Первая часть русского издания представляет буквальный перевод оригинала, лишь австрийские меры заменены русскими. Оригинал второй части «Руководства» пока не обнаружен. Возможно, что вторая часть является трудом Головина или какого-нибудь другого русского автора.

Отметим, что организатором русских народных училищ был Ф. И. Янкович, который до переезда в Россию организовал такие же школы в Австрии.

Автор славянского оригинала «Руководства» на нём не указан. Есть достаточные основания считать им Стефана Вуяновского (1773—1829), ближайшего помощника Янковича в Австрии (см.: О. Ф. Хичий, Историко-математические исследования, т. X, 1957).

Т. Ф. ОСИПОВСКИЙ

Воспитанник Петербургской учительской семинарии Тимофей Фёдорович Осиповский (1765—1832), затем учитель Московского главного народного училища, преподаватель учительской семинарии и позднее профессор и ректор Харьковского университета, написал **«Курс математики»** в 3 томах.

Тимофей Фёдорович Осиповский.

В I томе (1802) на 66 страницах большого формата изложена начальная арифметика. В ней подробно излагается арифметика именованных чисел; сюда же впервые (в русских учебниках) включены непрерывные дроби; теория отношений, пропорций и тройное правило перенесены в алгебру. Изложение в основном в виде правил, как и в руководстве для народных училищ. Курс Осиповского (I и II томы) служил руководством в открываемых в начале XIX в. гимназиях. В своих философских трудах Осиповский был явно выраженным материалистом. Его материалистическое мировоззрение, по-видимому, идёт через М. Е. Головина, воспитанника и преданного последователя М. В. Ломоносова. Т. Ф. Осиповский в свою очередь оказал влияние на мировоззрение Н. И. Лобачевского, который неоднократно упоминает о его сочинениях.

С. Е. ГУРЬЕВ

Профессор училища корабельной архитектуры, академик Семён Емельянович Гурьев (1766—1813) по поручению морского ведомства разработал план преподавания математики в морском корпусе. По проекту Гурьева изучению высшей математики должны предшествовать: детские арифметика и геометрия (наглядные) и настоящая геометрия и наука исчисления («основания настоящей арифметики и алгебры»). В детской арифметике учащиеся должны были получить «предварительные для малолетних первоначальные правила арифметики». Учебника для этой части своего плана Гурьев не составлял.

В 1805 г. была напечатана **«Наука исчисления, книга первая, содержащая основания арифметики,** сочинение академика Гурьева». На 130 страницах большого формата обстоятельно излагается арифметика целых чисел и дробей обыкновенных и десятичных. Гурьев, согласно с Даламбером, считает, что «чем вывод строже, тем он ко разумению удобнее, ибо строгость состоит в приведении всей целости к началам наипростейшим». Основанием для строгого изложения арифметики у Гурьева служит теория пропорций. Такой подход к изложению арифметики оправдывается тем, что книга Гурьева представляет изложение арифметики юношам, усвоившим начальные сведения её в детской арифметике. В главе о нумерации Гурьев даёт интересный экскурс в историю систем счисления с основаниями, отличными от десяти.

Относясь с иронией к предположениям Лейбница об использовании двоичной системы для обращения китайцев в христианство, Гурьев приводит мнение Лапласа, что эти мысли Лейбница напоминают толкования Ньютона на библейские тексты, и подлинные слова Лапласа: «Когда мы видим отступления столь великих мужей, происшедшие единственно от впечатлений, во младенчестве сообщённых, то должны чувствовать, сколь система освобождённого от предрассудков воспитания есть полезна успехам ума человеческого».

Хотя книга Гурьева была назначена для специального учебного заведения, однако вследствие популярности автора, как учёного и преподавателя многих учебных заведений (духовной академии, института корпуса инженеров путей сообщения, кадетских корпусов), идеи его оказали некоторое влияние на преподавание математики в общеобразовательных школах начала XIX в.

В. С. КРЯЖЕВ

В 1811 г. в Москве вышла книга **«Купеческая арифметика** для банкиров, купцов, заводчиков, фабрикантов и воспитанников их, изданная для употребления в Московском коммерческом училище, директором оного Васильем Кряжевым, первый курс в двух частях» (312 страниц). Из воспоминаний Н. И. Пирогова известно, что «видный педагог Василий Степанович Кряжев открыл в 1811 г. в Москве частный пансион — «своекоштное отечественное училище для детей благородного звания для доставления родителям средства воспитать детей так, чтобы они могли быть способными для государственной службы». В этом пансионе учился Н. И. Пирогов.

Посвящая свою книгу «почтенному сословию московского купечества», Кряжев заявляет, что он составлял её, «почитая арифметику главнейшею для торгового человека наукою, и находя, что у нас ещё на российском языке нет собственно коммерческой арифметики». В книге даётся иллюстрированные большим числом примеров изложение арифметики целых и дробных чисел (обыкновенных и десятичных), всевозможных коммерческих расчётов и действий над именованными числами (переводы мер одних государств в меры других). Об этой книге в литературе до сих пор не упоминалось, хотя она этого заслуживает. Автор был для своего времени передовым человеком. Пирогов указывает: «Кряжев сказал нам в классе, что апокалипсис (одна из библейских книг) есть произведение поэта и не может считаться священною книгою».

Д. М. ПЕРЕВОЩИКОВ

Воспитанник Казанского университета первого приёма, затем учитель гимназии, профессор Московского университета и академик (с 1852) Дмитрий Матвеевич Перевощиков (1790—1880)

Дмитрий Матвеевич Перевощиков.

написал, помимо многих других учебников, **«Арифметику для начинающих»** (1820) и **«Ручную математическую энциклопедию»** в тринадцати книгах (1826—1837), первая из которых излагает арифметику. Последний труд Перевощикова оказал большое влияние на математическое образование в России. Восторженно о нём пишет Гоголь, педагогический талант Перевощикова высоко ценили Лермонтов и Чернышевский.

Арифметика в энциклопедии Перевощикова определяется как «наука, в которой объясняются все главные способы вычислений». Объяснения автора не вызывают замечаний и в настоящее время. Даются: алгорифм Евклида, элементарное изложение цепных дробей с использованием их для нахождения приближённых значений чисел (между прочим, для числа π), рассматривается вопрос о природе результата, получаемого при выражении обыкновенной дроби десятичной, используется понятие арифметического дополнения числа, даётся понятие об иррациональном числе. Вопросы о делимости чисел отнесены к теории чисел и в арифметике не рассматриваются. Задачи на тройное правило решаются приведением к единице; автор считает этот способ для арифметики преимущественным, так как «начинающие должны приучаться к соображению условий вопросов и разрешать их, не употребляя формулы». Автор рассматривает треугольные и квадратные числа и показывает их применение. Основные правила для решения разного вида задач в книге рассматриваются, но им отводится несравненно меньше места, чем в учебниках XVIII в.

В конце книги даётся восторженная характеристика метрической системе мер, и это в годы, когда во Франции эта система ещё не была употребительной.

Изложение всей арифметики таково, что книгу можно дать в руки нашему школьнику.

Книга написана вопросо-ответным методом, что, по-видимому, нашло хороший приём у читателей и вызвало подражания. В 1832 г. выходит таким же методом изложенная **«Краткая арифметика, служащая к легчайшему обучению малолетнего юношества, в вопросах и ответах,** состоящая в двух частях, изданная Константином Меморским». Книга эта переиздавалась много раз. Имеется издание 1899 г. «Арифметика в вопросах и ответах для легчайшего самообучения и обучения других. Составил Меморский. Новое издание, вновь исправленное и дополненное». Имя Меморского (без инициалов) на ней поставлено, по-видимому, только для рекламы. Примеры и задачи, как и вопросы в книге, не совпадают с таковыми в книге К. Меморского.

Подобные использования популярности учебников в коммерческих или славолюбивых целях были нередки. Во Франции, кроме упомянутого в нашем обзоре учебника Ф. Баррема, пользовался широкой популярностью учебник арифметики Лежандра, издававшийся много раз с 1657 по 1812 г. В 1746 г. некий Баррем издаёт «Новую истинно-совершенную арифметику». Книга представляет перепечатку книги Лежандра.

Совершенно таким же образом некий предприимчивый человек издал в 1699 г. в Берне учебник геометрии, по тексту совпадающий с весьма распространённой книгой (1669) французского академика художника Леклера; автором же бернского издания назван «Озонам, профессор математики». Здесь в начертании фамилии очень популярного автора Озанама, о котором у нас была речь, изменена одна буква.

В обоих случаях имеет место двойной плагиат. перепечатан чужой труд и использовано чужое популярное имя, в начертании которого сделано незаметное для читателя изменение, которое, однако, могло защитить плагиатора в случае законного преследования, если бы таковое возникло со стороны носителя использованного имени или его потомков. Использовавшие популярность имени К. Меморского, как видим, не дошли до двойного плагиата.

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Имя великого преобразователя геометрии Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856) должно быть отмечено и в обзоре развития преподавания арифметики в России. Лобачевский подчёркивал учителям одинаковую важность достижения при преподавании математики «формальной» и «материальной» целей — развития абстрактного мышления и сообщения практических знаний. По его взгляду, начинающих надо учить началам арифметики наглядно, чтобы у них всё было «под пальцами и перед глазами, чтобы чувства заменяли суждение». Арифметика необходима всем, поэтому она должна быть сделана доступной всем, преподавание её должно применяться к различным условиям и практическим надобностям. «Строгое математическое учение начинается с алгеброю, в ней возвращается также к первым правилам арифметики и утверждается верность их строгим суждением, выражаясь всегда буквами и знаками» («Наставления учителям математики в гимназиях»). В своей «Алгебре или вычислении конечных» 1834 г. Лобачевский дал изложение учения о числе. Начальная часть этой книги использовалась с хорошими результатами в течение десятков лет в казанских гимназиях. К сожалению, образца изложения начальной арифметики по взглядам Лобачевского мы не имеем.

П. С. ГУРЬЕВ

Пётр Семёнович Гурьев (1807—1884), сын академика Гурьева, в течение 30 лет состоявший учителем Гатчинского сиротского института, на основании своего опыта в институте и в школе, на собственные средства им содержавшейся для сирот, разработал методику преподавания начальной арифметики, которую изложил в **«Арифметических листках»** (1832 и 1847), **«Руководстве к преподаванию арифметики малолетним детям»** (1839) и **«Руководстве к преподаванию арифметики** (1842). В 1861 и 1881 гг. Гурьев опубликовал свои методические идеи в **«Практической арифметике»**.

Методические идеи Гурьева представляли известную новизну для своего времени, хотя часть их имелась и у прежних авторов, правда, не в столь концентрированном виде. Он требует, чтобы сообщаемые детям знания были полезны в общежитии, нарастали концентрами, определениями кончалось, а не начиналось обучение, учащиеся из наглядных примеров приходили бы к необходимости правил и обобщений. «Арифметические листки» представляли плакаты, содержащие материал по отдельным темам; плакаты эти по мысли автора должны были после объяснения вопроса учителем раздаваться ученикам, сообразуясь с силами и способностями каждого, для организации самостоятельной работы их.

Методические руководства Гурьева содержали полезные указания для учителя, хотя в них менее оригинальности, чем полагает сам автор, который резко критикует и Песталоцци и Дистервега (отчасти обоснованно) и считает себя автором первого методического пособия для учителя, забывая, что уже в 1786 г. было издано «Руководство учителям», что имелось методическое руководство для учителей арифметики Ф. И. Буссе (1831) и что во многих учебниках арифметики содержались и методические указания для учителя. «Практическая арифметика» Гурьева (1861) в первой части («низший курс, доступный для всех») даёт только практические правила, без теории, для «практических людей», образование которых заканчивалось начальной школой. Вторая часть назначалась для тех, кто «на арифметике, как прочной основе, желал утвердить дальнейшие свои познания в математике». Мы видели, что так же была составлена «Арифметика» Магницкого. «Практическая арифметика» разбивается на 5 концентров, из которых каждый должен дать общую картину арифметики на своём числовом материале. Стремясь сделать свою книгу пригодной для самостоятельного изучения, автор загромоздил её большим числом практических приёмов, вследствие чего П. Л. Чебышев в учёном комитете министерства народного просвещения признал её негодной для школ. Отзыв последнего вызвал очень резкие выпады Гурьева по адресу «учёного ареопага, который предаёт остракизму всякий учебник, в котором хоть на йоту содержится отступление от однажды навсегда начертанной и обнародованной министерством программы».

Более обоснованы были резкие выступления Гурьева против метода Грубе.

Основное положение метода немецкого автора Грубе заключалось в том, что в основание обучения арифметике должно быть положено не обучение производству действий над числами, а изучение самих чисел путём опыта и наблюдения («созерцания», как выражается Грубе). Он пишет:

«Исходной точкой при обучении должна быть сущность числа. Ученик должен изучать числа не врозь, не разбросанно по действиям, а каждое число подвергать этим действиям в их органическом единстве. Каждое число в пределе 100 должно предстать перед умом ученика со всеми своими составляющими частями; из всестороннего созерцания отдельных чисел должны сами собой произойти четыре действия. Каждое число должно быть сравниваемо и измеряемо предыдущими числами, что делается или посредством разностного отношения, или кратного». На практике это означало, что каждое число в пределе сотни изучается посредством рассмотрения его как суммы и произведения меньших чисел, что возможно часто очень многими способами, изучается, как говорилось, «монографически». Некоторые русские методисты (Паульсон, Евтушевский) восприняла идею Грубе, приспособляя её для русской школы.

Против «грубеизма» резко выступил Л. Н. Толстой, который, между прочим, писал: «Мы избрали приёмы обучения ближайших соседей наших, немцев, во-первых, потому что мы всегда особенно склонны подражать немцам; во-вторых, потому что это был способ самый сложный и хитрый, а уже если брать чужое, то, разумеется, самое последнее — модное и хитрое; а, в-третьих, в особенности потому, что эти приёмы были более всего противоположны нашим старым приёмам. Итак, новые приёмы взяты у немцев, и не одни, а с теоретической подкладкой, т. е. квазифилософским оправданием этих приёмов».

Сторонники идеи Грубе не стеснялись в своих ответах на критику. Евтушевский заявил по адресу Толстого: «Беда, коль пироги начнёт печи сапожник, а сапоги тачать пирожник».

Гурьев выступил с основательными доводами против «грубеизма» в русской школе, критикуя книги В. А. Евтушевского с крайней резкостью.

Книги Гурьева сыграли некоторую роль в развитии преподавания арифметики в русской школе, но утверждение, что автор их занимает «одно из первых мест среди известных русских методистов и педагогов-писателей первой половины XIX в.» (В. Е. Прудников), является преувеличением.

Ф. И. БУССЕ

В начале XIX в. в Англии получил широкое распространение так называемый метод взаимного обучения, или ланкастерский. Он получил некоторое распространение и в России, как видно из иронического упоминания о нём у Грибоедова («Горе от ума»). Метод этот заключался в том, что учащиеся разбивались на группы, занятиями каждой из которых руководил лучший ученик группы, усвоивший урок при помощи учителя. Для занятий арифметикой в группах были заготовлены таблицы. В России использовались широко счёты, в результате чего при пользовании методом взаимного обучения достигалось усиление самодеятельности в школе и в некоторой мере покрывался недостаток учителей, но такое преподавание не могло обеспечить достаточно основательных знаний у учащихся. Попечитель Петербургского учебного округа, впоследствии министр народного просвещения, С. С. Уваров возымел намерение перенести метод взаимного обучения в Россию с какой целью были командированы в Англию для изучения на месте этого метода несколько молодых учителей, в числе их Фёдор Иванович Буссе (1794—1859), окончивший Петербургский педагогический институт в 1816 г. Получив диплом в изучении метода взаимного обучения и ознакомившись с применением его в институте Песталоцции в Швейцарии, Буссе вернулся в Петербург. Здесь он был назначен преподавателем Главного педагогического института, в котором в дальнейшем стал профессором, состоя одновременно директором III Петербургской гимназии и членом учёного комитета министерства народного просвещения.

Буссе, начиная с тридцатых годов XIX в., играл руководящую роль в организации преподавания математики в школах министерства народного просвещения — в разработке программ и составлении учебников для них. Им были изданы **«Руководство по арифметике»** (1830), **«Руководство к преподаванию арифметики для учителей»** (1831), **«Собрание арифметических задач для гимназий и уездных училищ»** (1831), **«Арифметические таблицы для приходских училищ по способу взаимного обучения»** (1834), **«Первоначальные упражнения в арифметике»** (1858), которые, отчасти изданные министерством, десятки лет служили единственными руководствами в школах министерства народного просвещения.

В программе математики для гимназий 1846 г., которая в основном принадлежала Буссе, преподавание арифметики, в отличие от прежних программ, оканчивалось не во II, а в III классе, в выпускном классе (VII) было введено повторение и дополнение некоторых разделов. Преподавателям давалось указание преимущественно заботиться о развитии и укреплении у учащихся самостоятельности «в применении известных им теоретических начал к решению практических задач». Раздел «Непрерывные дроби» из программы арифметики II класса был перенесён в алгебру, где он использовался при решении неопределённых уравнений. Особое внимание программа уделяла решению задач и приложению теории к практике. Учебники Буссе осуществляли эти требования новых программ. В руководствах автор ставит перед изучением арифметики ряд требований: 1) упражнения должны соответствовать понятиям и возрасту учащихся; 2) не оставлять ничего без основательного объяснения; 3) наблюдать постепенность; 4) сперва развивать в учащихся ясное понятие о правиле, а потом только давать формулировку его; 5) заставлять учащихся решать в уме лёгкие задачи; 6) показывать учащимся пользу и необходимость каждого арифметического правила, приспособляя его к решению занимательных и часто встречающихся в общежитии задач.

Фёдор Иванович Буссе.

Буссе на конкретных примерах показывает осуществление этих требований. «Руководство по арифметике» заканчивается определением, на основании всего ранее изложенного, содержания арифметики как учебного предмета. Идеи Буссе, в которых можно уловить сходство с идеями известного французского педагога Лакруа, переведённого на русский язык, стояли на научной высоте своего времени, были изложены кратко и чётко. Они только поэтому вызывали всеобщее одобрение, в том числе П. Л. Чебышева. Особенно популярна была книга «Первоначальные упражнения». Книги Буссе на десятки лет дали тон преподаванию математики в средней и начальной школе России.

Роль Ф. И. Буссе в истории развития преподавания математики в русской школе недостаточно оценена. Он являлся вполне квалифицированным в научном отношении практиком, знавшим из опыта школьные потребности и возможности и в своих книгах удовлетворявшим им.

В. Я. БУНЯКОВСКИЙ

Виктор Яковлевич Буняковский.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889), член Петербургской Академии наук в течение 61 года и вице-президент её на протяжении 35 лет, помимо большого числа научных работ, издал **«Арифметику»** (1844), **«Программу и конспект арифметики»** (1849).

Эти книги явились результатом продолжительного преподавания автором в средних военных учебных заведениях и элементарной математики. Хотя учебник арифметики Буняковского был приноровлен к программе кадетских корпусов, но он имел большое значение в развитии преподавания арифметики в России и рекомендовался учителям гимназий.

Буняковский в последних изданиях своего учебника вводит ряд изменений, явившихся новшествами:

1. Десятичные дроби излагаются в связи с действиями над целыми числами, в одном понятии «десятичные числа», до изучения обыкновенных дробей.
2. В учебник включён значительный по содержанию раздел о делимости чисел, в котором в ряде случаев оригинальными способами автор доказывает теоремы элементарной теории чисел.
3. Раздел о десятичных дробях изложен значительно подробнее, чем в прежних учебниках.
4. В конце книги дано обстоятельное изложение нумерации в разных системах счисления.

В книге «Программа и конспект арифметики», которая является методическим пособием для учителя, даётся ряд указаний, в том числе указания о необходимости насыщать уроки арифметики примерами из других наук и, что самое важное, о необходимости учителю знать предмет свой много глубже и шире излагаемого в классе. «Всё недосказанное учителем, — говорит Буняковский, — не ускользнёт от сметливости учеников, а ослабление доверия учащихся к познаниям преподавателя, конечно, должно иметь невыгодное влияние на их дальнейшие успехи».

«Арифметика» Буняковского является значительным достижением русской учебной литературы по арифметике в XIX в.

А. ЛЬВОВ

В 1848 г. вышла в Москве книга, не отмеченная в методической литературе: **«Арифметический самоучитель** геометрии, механики, физики и астрономии» Александра Львова (208 страниц и чертежи).

В предисловии книги читаем: «В трёх частях этого сочинения мне желательно с арифметической нитью провести в параллель нити геометрии, механики, физики и астрономии, так чтобы прочитавший его знал арифметику и всё из этих наук, что можно знать — зная одну только арифметику; самую же арифметику изложить в историческом её развитии, чтобы изложение было не так сухо и сжато выполнением только главной её идеи... Писавши это сочинение, я имел в виду тех людей, которые по неимению ли в детстве хороших навыков, по сухости ли и неинтересности по видимости самого предмета, получали какое-то предубеждение против математики, в зрелых же летах, при всём желании заняться математическими науками, не могли иначе поступить, как начав с арифметики, по окончании её перейти к геометрии, алгебре, потом к механике, физике, астрономии. Такое страшное терпение решительно отбивает всякую охоту к учению».

В книге арифметические сведения переплетаются с геометрическими, исторические свежи для того времени. Автор обещает во II томе дать изложение вопросов с помощью алгебры, в III — с помощью дифференциального и интегрального исчислений.

А. Ф. МАЛИНИН

После Ф. И. Буссе в средней и низшей школе России на десятки лет получили господство учебники А. Ф. Малинина, в числе их учебник и задачник по арифметике. Вышедшие до этого учебники арифметики профессоров Московского университета Н. Е. Зернова («Начальные основания арифметики», 1827) и А. Ю. Давидова не сыграли в школе значительной роли.

Александр Фёдорович Малинин (1835—1888) — учитель гимназий и затем преподаватель и директор Московского учительского института, в числе многих учебников совместно с К. П. Бурениным, в 1866 г. издал **«Руководство арифметики»** и **«Собрание арифметических задач».** «Руководство» нашло хороший приём в печати и у учителей, как написанное более современным и лёгким, сравнительно с книгами Буссе, языком и как соответствующее программам школы. В нём статьи более трудные и назначенные для повторительного обзора в выпускном классе (вопросы делимости чисел, непрерывные дроби и пр.) были выделены из основного курса мелким шрифтом. В основном текст изложения каждого действия сопровождался указанием значения его в общем строении курса и выделением вопросов, решае-

Александр Фёдорович Малинин.

мых данным действием, и повторительных вопросов, назначенных для самостоятельного изучения учащимися.

Не внеся в учебники арифметики значительно нового по сравнению с книгами Буссе, учебник Малинина и Буренина облегчил работу учителя и получил широкое распространение, хотя П. Л. Чебышев допускал его в школы лишь в качестве пособия.

Ф. И. СИМАШКО

В школах военного ведомства имели широкое распространение, оказывая влияние и на преподавателей в других школах, учебники арифметики Франца Ивановича Симашко (1817—1892), долголетнего директора Полтавской военной гимназии, издавшего учебники для всех математических предметов средних учебных заведений. **«Уроки практической арифметики»** (1852) Симашко являются «сборником отдельных объяснений наиболее важных статей арифметики» (Латышев), стремящихся сделать арифметику доступной и интересной для детей, приводя их к наблюдениям над арифметическими фактами и выводами правил. Предшественником Симашко в этом направлении является Н. Е. Зернов в своей «Арифметике для начинающих» (1827).

В учебнике арифметики, выдержавшем ряд изданий и близком по характеру к французскому учебнику Серре, неоднократно издававшемуся в русском переводе, не учтён уровень развития учащихся начальных классов. Учебник Симашко в теоретическом отношении достаточно безупречен, как и учебник Серре, но был пригоден для выпускного класса средней школы. Он представляет интерес в том отношении, что отражает, как и все другие учебники Симашко, методические взгляды М. В. Остроградского, близким сотрудником и последователем которого был Симашко.

В. А. ЕВТУШЕВСКИЙ

Деятелем школы военного ведомства, подобно Ф. И. Симашке, был и Василий Андрианович Евтушевский (1836—1888), автор **«Сборника арифметических задач»** (1871) и **«Методики арифметики»** (1882), которые выдержали много изданий.

Так как задачник и методика Евтушевского были самым тесным образом увязаны между собой, что облегчало учителю пользование ими, то, несмотря на неодобрение задачника П. Л. Чебышевым, он получил сразу широкое распространение. Являясь приверженцем идей Грубе, о чём сказано выше, Евтушевский значительно смягчил их; однако, следуя принципу монографического изучения отдельных чисел в пределах 20 и в дальнейшем, от 21 до 100, он лишь отчасти использовал способ Грубе. Успех книг Евтушевского обеспечивался в основном тем, что они облегчали работу учителя. В 1875 г. им издаётся **«Руководство для учителей и учительниц к преподаванию начальной арифметики в народных школах»**, в котором было оставлено лишь необходимое и доступное начальному учителю из содержания прежних изданий «Методики».

Василий Андрианович Евтушевский.

Указанные работы Евтушевского, отражая частично субъективные взгляды автора, шедшие вразрез со взглядами других методистов, оказали благотворное влияние на преподавание арифметики в нашей школе.

В. А. ЛАТЫШЕВ

Василий Алексеевич Латышев (1850—1912) был преподавателем Петербургского учительского института и издателем журнала «Русский народный учитель», о котором справедливо было сказано, что «каждая книжка его ожидалась учителями как письмо дорогого друга, всегда готового дать ценный совет и оказать поддержку в трудные минуты жизни».

В. А. Латышев издал: **«Объяснительный курс арифметики»** (1877), **«Руководство к преподаванию арифметики»** (1880) и **«Учебник арифметики в объёме младших классов гимназии»** (1882). Согласно взглядам Латышева, душа школы — учитель. «Преподавание — дело живое, и успех его тесно связан с теми личностями, которые участвуют в деле, то есть личными склонностями, как учащего, так и учащихся, поэтому успех дела всегда будет зависеть от степени влечения учащихся к своей работе. Для того же, чтобы увлечься работой, необходимо внести в неё долю своего личного участия, своего «я». В предисловии к первой книге Латышев указывает в качестве её цели «улучшить

Василий Алексеевич Латышев.

арифметические знания, показав, как много можно (мы прибавили бы: и нужно.— *И. Д.*) подумать над тем, что считается известным». В «Учебнике арифметики» автор стремится к тому, чтобы «ученикам ясно была видна связь между всеми отделами предмета, чтобы все предлагаемые объяснения проникнуты были одним духом, вытекали одно из другого, не были бы случайны, чтобы правильность и последовательность никогда не приносились в жертву лёгкости их».

«Руководства к преподаванию должны выяснять главным образом руководящую идею, иначе они всегда будут содействовать распространению механических приёмов»,— пишет Латышев в своём ценном историческом очерке русских учебных руководств по математике («Педагогический сборник», 1878). Основными идеями «Руководства к преподаванию арифметики» являются следующие:

1) хороший результат преподавания — не многочисленные, а основательные знания;

2) слишком большое облегчение работы ученика способствует не возбуждению, а ослаблению энергии его;

3) «кого всегда тащат на помочах, тот уже не сумеет ходить сам, без поддержки».

Заботясь о подборе приноровленных к развитию мыслительной способности учащихся задач, Латышев считает, что наиболее важное значение при изучении арифметики имеет теория.

Методические руководства Латышева являются шагом вперёд в области русской литературы по преподаванию арифметики во второй половине XIX в.

А. И. ГОЛЬДЕНБЕРГ

Широко известен популярный педагог, лектор и автор книг в области методики арифметики конца XIX в. Александр Иванович Гольденберг (1837—1902). Кандидат Московского университета, затем прослушавший курс артиллерийской академии, он преподавал в военных учебных заведениях, в учительских семинариях, на многих учительских курсах (на последних в основном методику арифметики). Печатным наследием его деятельности явились **«Методика начальной арифметики»** (1885) и **«Сборник**

задач и примеров для обучения начальной арифметике» (1885), выдержавшие десятки изданий, и большое число журнальных статей. Методическим целям служил и издававшийся Гольденбергом в 1879—1882 гг. журнал «Математический листок», посвящённый в значительной части истории элементарной математики.

Александр Иванович Гольденберг.

Заслугой А. И. Гольденберга является прежде всего окончательное изгнание из русской методики арифметики идей Грубе или, как он выразился, «немецких измышлений в русской школе» (Очерк в томе I «Учебно-воспитательной библиотеки», 1876).

Основы методики арифметики Гольденберга можно кратко формулировать несколькими положениями:

1. Обучение детей счислению имеет целью научить их сознательно производить действия над числами и развить навык прилагать эти действия к решению задач общежитейского содержания.

2. Общеупотребительные, сокращённые способы производства арифметических действий основаны, с одной стороны, на применении простейших свойств чисел и, с другой, на пользовании десятичным расчленением их.

3. Образовательное значение счисления заключается в том, что, «обучаясь приёмам вычисления, дети ясно видят пред собой цель, которую в каждом данном случае им предстоит достигнуть, отдают себе полный отчёт в тех средствах, при помощи которых они могут самостоятельно достигнуть цели, и, пользуясь десятичным счислением, приучаются видеть в нём то тонкое и совершенное орудие, которое мы недостаточно ценим только потому, что оно так просто и нам так привычно».

Развивая эти положения, основанные на богатейшем опыте автора и передовых учителей, методика явилась ценным руководством при движении школы к достижению перечисленных целей.

Незадолго перед кончиной А. И. Гольденберга в Саратове были изданы его **«Беседы по счислению»**, в которые автором внесены поправки, намеченные для нового издания «Методики». Посмертно издана эта книга в 1906 г. (под ред. Д. Л. Волковского).

Семён Ильич Шохор-Троцкий.

С. И. ШОХОР-ТРОЦКИЙ

Виднейшим представителем методики арифметики, объединившим лучшие результаты работы прогрессивных методистов прошлого и внёсшим много нового в науку обучения арифметике последних дореволюционных лет, являлся Семён Ильич Шохор-Троцкий (1853—1923). Получив образование в Одесском и затем в нескольких германских университетах, он владел весьма широким кругозором в области математики, философии, педагогики и психологии. Педагогическая деятельность его протекала в петербургских частных гимназиях, известных своими методическими исканиями, и в ряде институтов, с работы в которых он был устранён за свои политические выступления в 1906 г. После этого Шохор-Троцкий ведёт преподавательскую работу на разных педагогических курсах, в Психо-неврологическом институте и в послереволюционный период в Педагогической академии, одновременно ведя большую работу в области методики.

В последние 20 лет своей жизни он читал лекции по методике математики во многих городах России на летних учительских курсах.

Среди большого числа книг С. И. Шохор-Троцкого видное место занимают: **«Методика арифметики»** (1886) часть I для начальных, II — для средних школ), выходившая и после революции в различных видах; **«Учебник арифметики»**, **«Арифметический задачник»** (отдельные варианты для ученика и учителя).

Отличительное и во многом новое для своего времени в методике арифметики Шохор-Троцкого — генетический метод. На основании повторяющихся фактов у ребёнка возникают некоторые общие счётно-числовые представления, которые затем обращаются в законы арифметических действий. Не техническая выучка на уроках арифметики должна, по Шохор-Троцкому, стоять на первом месте, а воспитание ребёнка. Методы преподавания должны беречь силы ребёнка, поддерживать самодеятельность его, пробуждать в нём интерес и любознательность.

Шохор-Троцкий во всех своих сочинениях проводит «методу целесообразных задач». По его взгляду, курсы математики должны быть построены не столько на объяснениях учителя и изучении текста учебника, сколько на методически подобранных упражнениях. Одновременно с этим Шохор-Троцкий настаивал на необходимости наглядности в преподавании (у него имеется специальная книга о наглядных пособиях по арифметике), взаимной связи отделов математики и введения в обучение математике прикладных вопросов. На протяжении всей своей преподавательско-методической деятельности он был радикальным реформатором преподавания математики, выступавшим за целесообразные жизненно практические нововведения, которые получили осуществление только в советской школе.

Николай Иванович Билибин.

Обладая высокоразвитым интеллектом, большими знаниями и опытом, Шохор-Троцкий всегда добивался исключительно интересного изложения методики арифметики. Об этом можно судить по брошюре «Отчёт о лекциях по методике начальной математики, прочитанных С. И. Шохор-Троцким в Костроме в 1910 г.» (составил В. В. Аристов, под ред. С. И. Шохор-Троцкого, Кострома, 1911).

Н. И. БИЛИБИН

В начале XX в. в связи с введением теоретической арифметики в программу средних школ появился ряд учебников по этому предмету. Среди них самым значительным по содержанию и своему влиянию на постановку преподавания был учебник Н. И. Билибина **«Теоретическая арифметика».** Этот учебник — вначале перевод и переделка французского автора Бертрана, а в последних изданиях в такой мере дополненный и обновлённый, что являлся по праву трудом Билибина.

Скончавшийся в декабре 1914 г. Николай Иванович Билибин, магистрант Петербургского университета, оставленный при университете П. Л. Чебышевым, был очень видным педагогом. Преподаватель ряда гимназий, директор I реального училища, в течение 27 лет преподаватель высших женских курсов Билибин, обладая незаурядными данными, привлёк к себе тёплое внимание педагогической общественности. Он составил учебники по всем предметам элементарной математики. Почти все они получили начало от известных французских учебников, но в такой мере обновлялись и дополнялись Билибиным, что в окончательном виде от французских оригиналов оставалось очень мало. Учебники Билибина представляют высшую ступень в дореволюционной учебной литературе по полноте и научности изложения. Высокую оценку Н. И. Билибину, как преподавателю, даёт Н. К. Крупская.

Настоящие строки являются напоминанием об этом большом педагоге, кончина которого во время первой мировой войны прошла незамеченной.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА В РУССКИХ УЧЕБНИКАХ

Несколько слов следует сказать о развитии теоретической арифметики в России.

Начала теоретической арифметики в скромных размерах включали в свои учебники, следуя примеру В. Я. Буняковского, многие авторы, например профессор Варшавского университета М. А. Андреевский (**«Руководство к арифметике»**, Варшава, 1872). Виктор Николаевич Стрекалов, преподаватель второго петербургского кадетского корпуса, в 1890 г. издал **«Теоретическую арифметику»** (Спб. 1890), в которой стремился дать обоснование арифметики рациональных чисел. Он резко критикует («Педагогический сборник», 1899, № 9, стр. 184—209) зародившийся в немецкой средней школе учебный предмет «общую арифметику», который, по мнению Стрекалова, соединяет «две совершенно различные как по своему предмету, так и по методу науки, каковы арифметика и алгебра». Критика вызвана появлением книги М. С. Волкова «Эволюция понятия о числе» (Петербург, 1899), хотя направление, которое Стрекалов критикует, появилось в России значительно раньше и, по-видимому, не под влиянием немецких авторов.

Первый учебник под названием **«Очерк теоретической арифметики»** в России издал в 1849 г. Н. Н. Севастьянов, старший учитель второго кадетского и морского корпусов.

В 1865 г. в Петербурге вышел **«Курс теоретической арифметики»**, составлен Василием Исаченко. Автор книги Василий Лаврентьевич Исаченко (1839—1915) по окончании математического факультета Петербургского университета с 1865 по 1872 г. был преподавателем Минской гимназии.

А. К. ЖБИКОВСКИЙ

Антон Ксаверьевич Жбиковский (1829—1900) в 1862 г. издал книгу **«Основания общей арифметики для VIII класса гимназии»** (3 части, Петербург), которая выдержала несколько изданий. Автор — ученик П. Л. Чебышева, который одобрительно оценил его магистерскую диссертацию («Полное собрание сочинений»

П. Л. Чебышева, т. V, стр. 296). В 1871 г. в Казанском университете он получил степень доктора и до конца дней своих состоял преподавателем гимназии и приват-доцентом университета в Казани.

Антон Ксаверьевич Жбиковский.

Первая часть книги Жбиковского даёт строгое изложение обычного курса арифметики, включая непрерывные дроби, пропорции, прогрессии и практические правила. Вторая часть книги содержит комбинаторику, степени и корни, логарифмы, общие предложения об уравнениях и понятие о бесконечных рядах. Третья — даёт изложение теории комплексных чисел, решение уравнений двучленных, третьей и четвёртой степеней.

П. Л. Чебышев отметил в своём отзыве («Полное собрание сочинений», т. V, стр. 345), что это сочинение «заключает в себе полный и подробный курс арифметики со включением многих статей алгебры» и что «такое сближение арифметики с алгеброй полезно для ясного уразумения их и даёт возможность легко сделать многие дополнения в этих науках». Однако Чебышев не видит руководящей идеи автора при выборе вопросов алгебры, указывая, между прочим, что «учение о мнимых величинах не имеет значения для арифметики и даже могло бы быть исключено из курса начальной алгебры, как это сделано в военных учебных заведениях». Книга Жбиковского по рекомендации Чебышева включалась в дальнейшем в числе пособий для библиотек гимназий и уездных училищ.

В 1899 г. вышла упомянутая выше книга «Эволюция понятия о числе» (Спб.) учителя II Петербургского реального училища Михаила Сергеевича Волкова (1860—1918), одного из выдающихся дореволюционных учителей. Кроме этой книги и большого числа статей, ему принадлежат ещё «Учение о пространстве, или рациональная геометрия» (1882), «Пантригонометрия» (1886), «Логическое исчисление» (1888) и «Учение о вероятностях» (1913).

Историк Казанского университета (см. «Казанский университет за 125 лет», Казань, 1930, т. II, стр. 125) признаёт М. С. Волкова и профессора Ф. М. Суворова единственными авторами, излагавшими в России идеи Лобачевского до 1893 г. — столетия со дня рождения последнего (что не совсем точно).

Михаил Сергеевич Волков.

Труд М. С. Волкова, направленный к цели познакомить русского читателя с математической логикой, вызвал критику П. С. Порецкого, одного из общепризнанных основоположников этой дисциплины [1], а также критику в журнале министерства народного просвещения [2]. В эволюции понятия о числе Волков излагает в виде очень длинной цепи аксиом и теорем учение о числе до комплексных, алгебраических и трансцендентных. Критика В. Н. Стрекаловым последней книги исходит из положения Коши, согласно которому нельзя смешивать двух совершенно различных понятий, какими являются «арифметическое и алгебраическое число или количество». Авторы конца XIX в., по мнению Стрекалова, «к сожалению, недостаточно оценили этот мудрый совет знаменитого математика и в конце концов додумались до «общей арифметики»...

В последние годы появилось несколько работ под заглавием «Основания арифметики», назначенных служить руководствами при изучении в педагогических учебных заведениях предмета «Основания арифметики». Новейшие из них:

М. Е. Драбкина, Основания арифметики, Минск, 1962.

И. Т. Демидов, Основания арифметики, Учпедгиз, 1963.

Книги эти являются полезными пособиями и для учителя математики средней школы. Предшественниками этих книг являются, кроме «Введения в анализ» А. В. Васильева и его же книги «Целое число» (1922), лекции профессора Харьковского университета А. П. Пшеборского «Основания арифметики» (1908, 1911).

Из сказанного выше (о А. К. Жбиковском) видно, что общая арифметика в русских учебниках не является механическим переносом «выдумки немецких авторов», а дальнейшая история показывает методическую жизнеспособность идей общей арифметики.

Во всяком случае, книга М. С. Волкова, несмотря на частные её недочёты, указываемые Стрекаловым, является учитель-

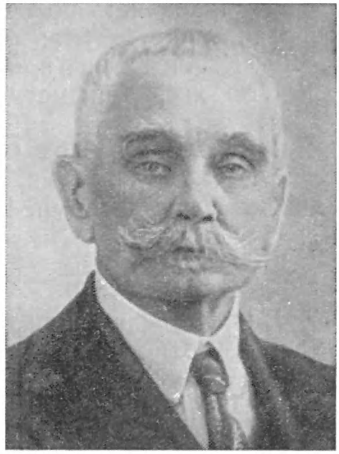
---

[1] «Собрание протоколов секции физико-математических наук Казанского общества естествоиспытателей», т. VII, стр. 260 и след.

[2] 1889 г., сентябрь, стр. 161 и след.

ским произведением, мимо которого нельзя пройти в обзоре русской литературы по арифметике, особенно если учесть, что для русских университетов подобное изложение о числе появилось только в 1902 г. («Введение в анализ» А. В. Васильева, части I и II, Казань).

На современном научном уровне теоретическая арифметика изложена в учебниках П. Д. Белоновского (1938), В. М. Брадиса (1954), И. В. Арнольда (1939) и в книге В. Н. Комарова «Теоретические основы арифметики и алгебры» (1929). Теоретической арифметике и основам теории чисел посвящён том I «Энциклопедии элементарной математики» Академии педагогических наук РСФСР и «Основы учения о числе в XVIII в.» В. Н. Молодшего (Учпедгиз, 1963).



Андрей Петрович Киселёв.

А. П. КИСЕЛЁВ

Последние строки краткого библиографического обзора основных дореволюционных авторов руководств арифметики естественно посвятить А. П. Киселёву.

Андрей Петрович Киселёв (1852—1940), окончив Петербургский университет в 1875 г., был назначен учителем математики и механики в Воронежское реальное училище. После 15-летней работы в нём Киселёв был переведён в Курскую гимназию, как признанный неблагонадёжным. Причиной послужила его деятельность в обществе вспомоществования бедным ученикам, в пользу которого была поставлена нежелательная для губернатора пьеса. В 1892 г. Киселёв вернулся в Воронеж на должность преподавателя в кадетском корпусе и в 1910 г. вышел на пенсию. В послереволюционные годы он вновь вернулся к преподаванию. В 1933 г. Президиум Центрального Исполнительного Комитета наградил «Андрея Петровича Киселёва, старейшего преподавателя математики и автора учебников, которые в течение десятилетий служили основными руководствами в русской школе, учитывая плодотворную долголетнюю педагогическую деятельность», орденом Трудового Красного Знамени.

В 1884 г. вышла «Арифметика» Киселёва, которая всем читателям знакома. Её не раз критиковали, однако ни один из упомянутых в нашем обзоре учебников не выдержал столько изданий и не служил так долго русской школе, как учебник А. П. Киселёва.

Из руководств по арифметике, вышедших в последние годы, необходимо отметить:

И. К. Андронов, Арифметика натуральных чисел, 1954.

Его же, Арифметика дробных чисел и основных величин, 1955.

И. К. Андронов и В. М. Брадис, Арифметика, 1962.

И. К. Андронов, Арифметика. Развитие понятия числа и действий над числами, 1962.

* * *

В наш обзор вошли только те деятели, которые оказали в том или ином отношении существенное влияние на постановку преподавания арифметики в русской школе. Объём книги позволил коснуться очень кратко их деятельности. Более подробные сведения читатель найдёт в книгах:

Д. Д. Галанин, История методических идей по арифметике в России, ч. I. XVIII век, М., 1915.

В. Е. Прудников, Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков, М., Учпедгиз, 1956.

А. С. Пчёлко, Хрестоматия по методике начальной арифметики, М., Учпедгиз, 1940. (Здесь, кроме биографических сведений о ряде методистов, даны выдержки из их работ.)

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

книг по вопросам преподавания арифметики в России

Не рассмотренные в нашем обзоре книги отмечены звёздочкой (*)

Автор	Название книг	Год издания
И. Ф. Копиевский	Краткое и полезное рукозедение во аритметыку. Амстердам	1699
Л. Ф. Магницкий	Арифметика, сиречь наука числительная	1703
В. Киприанов	Новый способ арифметки феорики или зрительная (плакат)	1705
Л. Эйлер	Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Академии наук, части I и II	1740, 1760
Н. Г. Курганов	Универсальная арифметика	1757
С. Я. Румовский	Сокращения математики, часть первая	1760
Я. П. Козельский	Арифметические предложения	1764
Д. С. Аничков	Теоретическая и практическая арифметика	1764
С. К. Котельников	Первых оснований математических наук, часть первая, содержащая в себе арифметику	1766
Н. Г. Курганов	Арифметика, или числовник, содержащий в себе все правила цифирного вычисления	1771
Переводная	Руководство к арифметике для употребления в народных училищах, части I и II	1783
Комиссия об устройстве народных училищ	Руководство для учителей I и II классов народных училищ	1786
Е. Д. Войтяховский	Курс математики, ч. I. Арифметика	1787
Т. Ф. Осиповский	Курс математики, том I	1802
С. Е. Гурьев	Науки исчисления книга первая, содержащая основания арифметики	1805
В. С. Кряжев	Купеческая арифметика для употребления в Московском Коммерческом училище	1811

Автор	Название книг	Год издания
Д. М. Перевощиков	Арифметика для начинающих	1820
Д. М. Перевощиков	Ручная математическая энциклопедия, часть I. Арифметика	1826
Н. Е. Зернов	Начальные основания арифметики	1827
Ф. И. Буссе	Руководство по арифметике	1830
Ф. И. Буссе	Руководство к преподаванию арифметики	1831
Ф. И. Буссе	Собрание арифметических задач для гимназий и уездных училищ	1831
К. Меморский	Краткая арифметика, служащая к легчайшему обучению малолетнего юношества, в вопросах и ответах	1832
П. С. Гурьев	Арифметические листки	1832
Ф. И. Буссе	Арифметические таблицы для приходских училищ по способу взаимного обучения	1834
Н. И. Лобачевский	Алгебра и вычисление конечных	1834
П. С. Гурьев	Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям	1839
П. С. Гурьев	Руководство к преподаванию арифметики	1842
В. Я. Буняковский	Арифметика	1844
А. Львов	Арифметический самоучитель геометрии, механики, физики и астрономии	1848
В. Я. Буняковский	Программа и конспект арифметики	1849
* Н. Н. Севастьянов	Очерк теоретической арифметики	1849
* Ожаровский	Беседы с малолетними детьми о первых началах арифметики	1853
Ф. И. Буссе	Первоначальные упражнения в арифметике	1858
* И. И. Паульсон	Арифметика по способу немецкого педагога Грубе	1860
П. С. Гурьев	Практическая арифметика, I и II части	1861, 1881
А. К. Жбиковский	Основания общей арифметики	1862
А. Ю. Давидов	Арифметика	1870
А. Ф. Малинии и К. П. Буренин	Руководство арифметики	1866
В. А. Евтушевский	Сборник арифметических задач	1871
В. А. Евтушевский	Методика арифметики	1872
* Беме	Методика начальной арифметики	1876
В. А. Латышев	Объяснительный курс арифметики	1877
В. А. Латышев	Руководство к преподаванию арифметики	1880
* В. П. Воленс	Методика арифметики	1880
В. А Латышев	Учебник арифметики в объёме младших классов гимназий	1882
А. П. Киселёв	Арифметика	1884
А. И. Гольденберг	Методика начальной арифметики	1885

Продолжение

Автор	Название книг	Год издания
А. И. Гольденберг	Сборник задач и примеров для обучения начальной арифметике	1885
С. И. Шохор-Троцкий	Методика арифметики	1886
В. Н. Стрекалов	Теоретическая арифметика	1890
* Г. М. Вишневский	Записки по элементарной арифметике	1892
* Ф. И. Егоров	Методика арифметики	1893
* С. В. Житков	Методика арифметики, 4 изд.	1894
* К. П. Арженяков	Уроки начальной арифметики	1896
М. С. Волков	Эволюция понятия о числе	1899
* В. К. Беллюстин	Методика арифметики	1899
* К. П. Арженяков	Методика начальной арифметики	1898
А. И. Гольденберг	Беседы по счислению	1906
* Д. Д. Галанин	Методика арифметики. Первый год обучения. Второй год обучения	1910 1911
* К. Мукалов	Записки по методике арифметики	1911
* Ф. А. Эрн	Очерки по методике арифметики	1912

ПРИМЕЧАНИЯ

1) Словом «множество» обозначается всякое собрание вещей, символов, понятий или слов, которые перечислением, каким-нибудь признаком или иным способом выделены из числа всех остальных вещей. Природа этих вещей при образовании понятия множества не имеет значения.

В. Оствальд, бывший профессор Рижского политехнического института, в своей «Философии природы», употребив термин «множество», пишет: «Прошу не связывать с этим словом ничего особенного. Если вы когда-нибудь присутствовали при том, как мать очищает карман своего десятилетнего сына, то вы имеете совершенно достаточное представление о том, что я хочу сказать».

У Марка Твена «в кармане Тома Сойера оказалось: 12 мраморных шариков, свистулька, осколок синего бутылочного стекла, деревянная пушка, кусок мела, стеклянная пробка от графина, оловянный солдатик, пара головастиков, 6 хлопушек, одноглазый котёнок, медная ручка от двери, собачий ошейник — только собаки не было, рукоятка ножа, четыре апельсинных корки и старая ломаная рамка от окошка с чердака». Эти самые разнообразные вещи, образующие «множество вещей в кармане Тома Сойера», являются «элементами» этого множества.

2) Новейшие археологические исследования указывают, что уже в эпоху каменного века (III—II тысячелетия до н. э.) человек переходит к десятичной системе счисления (E. Fettweis, Die Mathematik des Megalithkulturkreises, 1956).

3) Мы привыкли к тому, что когда в научной книге употребляется какое-нибудь новое слово, то даётся логическое **определение** понятия, обозначаемого этим словом.

Многие из читателей знакомы с книгой профессора А. Я. Хинчина «Основные понятия математики и математические определения в средней школе». В ней говорится:

«Понятие числа отличается от многих понятий школьного курса математики своей первичностью. Это значит, что понятие числа относится к разряду тех понятий, которые не определяются через другие понятия. Математическая наука не содержит в себе ответа на вопрос «Что такое число?» — такого ответа, который состоял бы в определении этого понятия через другие, ранее установленные понятия. Математическая наука даёт этот ответ в другой форме — перечисляя свойства числа, выраженные аксиомами (предложениями, которые принимаются без доказательства за истинные)».

Способ построения научных понятий, описываемый здесь профессором А. Я. Хинчиным, характерен для так называемого формально-логического метода изложения науки.

Однако методическая наука не может ограничиться таким формально — логическим взглядом на число, который ничего не говорит о возникновении понятия числа. Данное в тексте книги определение числа не только раскрывает содержание и логическую структуру понятия натурального числа, но и даёт историческую основу его. Ценность такого подхода к понятию числа в советской литературе впервые была выяснена профессором С. А. Яновской («О так называемых определениях через абстракцию»). Об аксиоматическом построении арифметики будет сказано в 32-м параграфе первой главы книги.

4) Э. Кольман, Бернард Больцано, изд. АН СССР, 1955.

5) В языках многих народов сохранились следы ограниченного владения числовым рядом в прошлом. В египетских иероглифах «много» обозначалось четырьмя чёрточками. Римский поэт Овидий (I в. до н. э.) восклицает: «Он трижды, четырежды счастлив», что означало «бесконечно счастлив».

Все эти выражения остались в языках с той эпохи, когда четыре было наибольшим освоенным числом.

6) О Чильтане существует обширная литература, сводка которой дана в книге «Академику В. В. Бартольду — туркестанские друзья, ученики и почитатели», Ташкент, 1927.

7) См.: А. В. Васильев, Числовые суеверия, Казань, 1886; И. И. Чистяков, Числовые суеверия, М., 1927; А. В. Васильев, Целое число, Л., 1919 и 1922.

8) В Южной и Центральной Америке и в Меланезии (острова Тихого океана) и в настоящее время обнаружены племена, счёт которых представляет сочетание десятичного и шестеричного счисления.

В отличие от распространённого взгляда, И. Н. Веселовский («Труды Института естествознания и техники», АН СССР, 1955) считает, что шестидесятеричное счисление вавилонян возникло из способов счёта на пальцах, аналогичного приёмам западноевропейского средневековья.

9) Jean Essig, Douze notre dix futur, Paris. 1955. Монография «Дюжина — наша будущая десятка», популярное изложение, «Природа», 1955, № 8.

10) Вес Земли $5{,}974 \cdot 10^{26}$ граммов.

11) Перевод книги Марко Поло в русском издании 1877 г. имеет заглавие: «Путешествие по Татарии и другим странам Востока венецианского дворянина Марко Поло, прозванного миллионером». В 1929 г. (Ленинград) вышла книга П. К. Губера «Хождение на восток венецианского гостя Марко Поло, прозванного Миллионщиком».

В предисловии к последнему русскому изданию поясняется: «Прозвище «Millione» Марко Поло было дано вовсе не из-за богатства, как предполагали раньше некоторые его биографы» («Книга Марко Поло», перевод старофранцузского текста И. П. Минаева, 1955).

12) An address on Administrative Reform.

13) В 403 г. до н. э. старые законы были в Афинах «переизданы» новым ионийским письмом, и с этого момента начинается история классического греческого алфавита и ионийской нумерации. См.: В. А. Кочергина, Краткий очерк истории письма, изд. Московского университета, 1955.

14) «Звёздное небо по Арату Германика», перевод с латинского Б. Фохт, Пб., 1911.

Образцом изложения науки в стихах является произведение римского поэта Лукреция (99—55 гг. до н. э.) «О природе вещей», имеющееся в издании Академии наук СССР: Лукреций, О природе вещей, 1946 (даны параллельно латинский текст и стихотворный перевод и 700 страниц комментариев С. И. Вавилова, С. Я. Лурье, И. И. Толстого и др., с фрагментами из сочинений древних материалистов Эпикура и Эмпедокла).

Попытки излагать математику стихами делались и в новое время. Существует предание, что Евклид на вопрос царя Птолемея: «Нельзя ли изложить математику более легко, чем это сделано в «Началах» Евклида?» — ответил, что в математике нет царского пути. Болонский математик Пиетро Менголи (1626—1686), имеющий значительные заслуги в науке (в теории рядов), в 1655 г. явно под влиянием легенды об Евклиде дал своей книге заглавие: «Царский путь к математике через арифметику, алгебру и планиметрию». В этой книге, посвящённой шведской королеве Христине, в латинских стихах автор надеется наиболее кратким, лёгким и ясным путём научить читателя математике.

15) Старый обычай выражать стихами внушаемые учащимся мысли жив и в настоящее время в детской литературе. В популярной среди школьников пьесе В. Королёва и М. Львовского «Димка-невидимка» авторы поступают по Магницкому, заставляя действующее лицо петь стихи:

Чтобы в небо взлететь,
Корабли водить,
Надо многое знать,
Надо много уметь,
И при этом, и при этом
Заметь-те-ка,
Важная наука
Ариф-ме-ти-ка!

Почему корабли
Не садятся на мель,
А по курсу идут
Сквозь туман и метель?
Потому что, потому что,
Вы заметь-те-ка,
Капитанам помогает
Ариф-ме-ти-ка.

Чтоб врачом, моряком
Или лётчиком стать,
Надо прежде всего
Арифметику знать.
А на свете нет профессии,
Вы заметь-те-ка,
Где бы нам не пригодилась
Ариф-ме-ти-ка.

16) *Апексы* — числовые знаки на абане западных арабов.

17) «The invention of something to represent nothing». (Изобретение чего-то, чтобы представить ничто).

18) Источники дальнейших сведений о среднеазиатских математиках:

Ал-Хорезми:

Т. И. Райнов, Великий учёный Узбекистана, Ташкент, 1943; «Историко-математические исследования», вып. IV, 1951.

А. М. Мирзоев, Страницы из истории алгебры ал-Хорезми («Математика в школе», 1950, № 1).

А. П. Юшкевич, Арифметический трактат Мухáммеда бен Муса ал-Хорезми. «Труды Института истории естествознания и техники Академии наук СССР», т. I, М., 1954.

Бируни:

Бируни, Сборник статей, под ред. С. П. Толстова, изд. АН СССР, 1950.

«Бируни — великий учёный средневековья», изд. Узбекской АН, 1950.

Г. П. Матвиевская, К истории математики Средней Азии, Ташкент, 1962.

Улугбек и ал-Каши:

Ал-Каши, Математические труды в переводе Б. А. Розенфельда. Примечания переводчика и А. П. Юшкевича, М., 1956 (см. 51); Н. И. Леонов, Улугбек — великий астроном XV века, М., 1950; В. В. Бартольд, Улугбек и его время, изд. АН СССР, 1918; «Обсерватория Улугбека», «Труды Института истории и археологии Узбекской АН», т. V, Ташкент, 1953.

Т. Н. Кары-Ниязов, Астрономическая школа Улугбека, изд. АН СССР, 1950.

Омар Хайям:

А. П. Юшкевич, Омар Хайям и его алгебра. «Труды Института истории естествознания АН СССР», т. II, 1948.

«Математические трактаты Омара Хайяма». Перевод Б. А. Розенфельда. Примечания переводчика и А. П. Юшкевича. «Историко-мат. исслед.», вып. VI, 1953.

Омар Хайям, Робайят, Л., изд. «Академия», 1935; Омар Хайям. Четверостишия, «Классики таджикской литературы», Сталинабад, 1948.

Были ещё другие издания:

С. Б. Морочник, Философские взгляды Омара Хайяма, Сталинабад, Таджикгосиздат, 1952.

Статья В. А. Жуковского в «Сборнике статей учеников профессора В. Р. Розена ко дню 25-летия его первой лекции», Спб., 1897.

С. Б. Морочник и Б. А. Розенфельд, Омар Хайям — поэт, мыслитель, учёный, Сталинабад, Таджикгосиздат, 1957.

19) Арабский полководец Кутейба в 712 г. заключил договор с царём Согда (сли Согдианы, бассейн реки Зеравшин) Гуреком. См. «Советское востоковедение», 1957, № 2 (июль).

20) Доказательство данного выше равенства и аналогичных им изложено в книге: И. Я. Депман, Метод математической индукции, Л., 1957.

21) Согласно исследованиям австрийского автора Нагля, таким же усовершенствованным счётным прибором являются римские счёты, изображение которых дано на стр. 291 выпуска V «Историко-математических исследований».

22) Приведённый в тексте перевод принадлежит заслуженной деятельнице искусств Т. Л. Щепкиной-Куперник. Можно было бы указать много курьёзов в обращении с математическими терминами у «братьев-писателей», забывающих ироническое предупреждение Анатоля Франса в повести «Ивовый манекен»:

«Ясновидящая передавала вопрошающим ответы святой Радегунды на всякие вопросы: каково состояние здоровья римского папы, каковы будут результаты франко-русского соглашения, пройдёт ли в парламенте подоходный налог, найдут ли лекарство от чахотки,— но святая Радегунда не сумела ничего ответить на вопрос, чему равен логарифм девяти».

23) Сохранилось «Дело о пожитках и книгах, оставшихся после умершего переводчика Ильи Копиевского», согласно которому жена и дочь Копиевского 19 октября 1715 г. были «в посольском приказе допрашиваны, книги какие на разных языках переведённые и непереведённые после смерти Копиевского остались ли».

24) Знак ; в старину был знаком вопроса.

25) Сообщение о немецком алгоритме 1475 г. «Der deutsche Algorithmus», «Osiris», IV, стр. 35.

26) У некоторых народов Южной и Центральной Америки ещё в наше время одно и то же число имеет различные названия в зависимости от перечисляемых объектов (людей, животных, неодушевлённых предметов). См.: E. Villa, La nascitá dei numeri, «Civilta machine», 1956, № 4.

27) Нейгебауэр, Лекции по истории математических наук, стр. 217.

28) Заслуги Б. Больцано в вопросе обоснования арифметики изложены автором настоящей книги в статье «Восстановление приоритета Б. Больцано» («Учёные записки Ленинградского государственного педагогического института», т. XVII. Физико-математический факультет, вып. II, 1957).

29) О важнейших вкладах каждого из этих учёных в теоретическую арифметику будет сказано в дальнейшем. Биографии Эйлера, Чебышева и Ферма даны в последней главе книги.

30) Приведённые высказывания совершенно не означают, что указанные учёные разделяют мистические взгляды на число пифагорейцев и других мистиков. Утверждения некоторых буржуазных философов о якобы возрождении «пифагореизма» в современной науке убедительно разбиты советскими авторами (Э. Я. Кольман, С. А. Яновская и др.).

Пифагорейцы — ученики и последователи философа-идеалиста и математика Пифагора (580—500 гг. до н. э.). Им принадлежит ряд открытий в арифметике, о которых речь в дальнейшем, и геометрии.

Наблюдения над некоторыми явлениями (например, зависимостью высоты звука от длины струны) привели пифагорейцев к провозглашению лозунга: числа суть сущность вещей — и к идеалистическому мировоззрению, согласно которому не материя, а числа, т. е. идеи, являются началом и основой всего существующего. Идеалистической философии пифагорейцев соответствовало и их антинародное политическое мировоззрение. По учению пифагорейцев числа, выражая законы явлений, вносят порядок в существующий в мире хаос различных величин: так же аристократия должна управлять хаотическими массами народа, господствовать над ними. Неоднократные восстания демократических масс против аристократического союза пифагорейцев закончились разгромом школы их, в результате которого погиб в глубокой старости и сам Пифагор.

История пифагорейской школы является одним из многочисленных примеров попыток использования науки в целях оправдания и «научного» обоснования угнетения народных масс.

Фальстаф у Шекспира («Виндзорские кумушки») после двух печально для него окончившихся попыток некоторого предприятия говорит: «Надо надеяться, что нечётные числа обладают волшебными свойствами, будь это относительно рождения, удачи или смерти». Это, как и многие аналогичные факты, является отголосками мистических взглядов на число пифагорейцев.

31) History of the theory of numbers by Leonard Eugene Dickson; three volums, New York, 1934.

32) Биографические сведения о древних учёных очень скудны, и приводимые в некоторых книгах портреты учёных древности совершенно недостоверны. Честно поступил художник, иллюстрировавший биографию Евклида, когда в сцене вручения Евклидом своих «Начал» царю Птолемею изобразил Евклида спиной к читателю.

Евклид (IV—III в. до н. э.) жил в Александрии (в Египте). Основной его труд «Начала», в котором изложена почти вся наша начальная геометрия и теоретическая арифметика.

Архимед (III в. до н. э.) жил в Сиракузах на острове Сицилии, умер в 212 г. В основном механик и физик, он внёс в арифметику существенно новое в своём «Исчислении песчинок», о чём у нас уже была речь. В геометрии он применяет вычисления, которых принципиально не допускал Евклид. Архимед — величайший математик древности.

Эратосфен (III в. до н. э.) жил в Александрии. Он составил труды в самых различных областях знания. Ему принадлежит, кроме «решета Эратосфена», первое вычисление длины меридиана.

Диофант (III и IV вв. н. э.) жил в Александрии. Он, называемый «отцом греческой алгебры», внёс ценный вклад и в теорию чисел.

33) У Эйлера есть работа о числе 1 000 009, доказывающая, что это число есть число составное. Наименьший простой делитель его 293 Чтобы делениями на простые числа обнаружить этот делитель, нужно число 1 000 009 делить на все простые числа натурального ряда до 293 включительно. В первых трёх сотнях 62 простых числа. Исключая, пользуясь признаками делимости, деления на 2, 3, 5, 7, мы должны были бы проделать 58 делений числа 1 000 009 на числа 11, 13, 17,..., 293, чтобы установить наименьший простой делитель данного числа. См. Fuler, Commentationes arithmeticae, II, стр. 243.

34) Иван Михеевич Первушин родился в 1827 г. в семье пономаря в Лысьвенском заводе Пермской области. На выпускном экзамене в Казанской духовной академии на замечательные математические способности Первушина обратил внимание П. Л. Чебышев и в дальнейшем высоко ценил их. Первушин некоторое время преподавал математику в духовной семинарии в г. Перми, но вскоре стал священником захолустного села Шадринского уезда. Придерживаясь весьма передовых взглядов, Первушин своей просветительской деятельностью навлёк на себя гонения властей и лишь благодаря заступничеству математиков Академии наук перед Синодом он не был уволен, а только переведён на другое место в том же уезде.

Неоднократно Первушин посылал в Академию наук свои работы по теории чисел: в 1877 г. о делимости числа $2^{2^{12}} + 1$ на 114 689, в 1878 г. о делимости числа $2^{2^{23}} + 1$ на число 167 772 161, в 1883 г. о простоте числа $2^{61}—1$. Он к 1897 г. закончил составление таблицы простых чисел до 10 миллионов, разработал метод проверки правильности результатов арифметических действий над большими числами (работа была представлена математическому конгрессу в Чикаго) и написал ряд других исследований по теории чисел, из которых напечатаны были лишь некоторые результаты.

Скончался этот талантливый математик-самоучка в 1900 г. О нём см.: А. Е. Раик. Уральский математик Иван Михеевич Первушин. «Историко-математические исследования», вып. VI, 1953.

35) Христиан Вольф (1679—1754), знаменитый в своё время философ, последователь Лейбница, руководитель научной подготовки Ломоносова. В 1723 г., обвинённый в атеизме, он должен был под угрозой виселицы сбежать из Галле в Марбург. Через 17 лет он вернулся в Галле в карете, которую везли 50 студентов, с шестью трубачами впереди и, согласно словам тогдашней газеты при кликах всего населения города, кроме своего правоверного сослуживца Ланге, по доносу которого Вольф в своё время вынужден был спасаться бегством от петли.

К. Ф. Гаусс.

Вольф написал руководство математики, переведённое на все главные европейские языки и на латинский язык. Были два русских издания, последнее под заглавием «Сокращение первых оснований мафиматики, сочинённое в пользу учащегося юношества Христианом Вольфом, профессором мафиматики и философии гальския академии и членом Санкт-Петербургския и парижския, Лондонского Социетета и берлинския академии. В Санкт-Петербурге. При морском шляхетном кадетском корпусе, вторым тиснением, 1791 года».

В 1723 г., когда в России не было ещё Академии наук, Вольф получил приглашение в Россию. Он ответил, что «для одного преподавания приезжать ему было бы неразумно, а для России невыгодно, ибо начинающих никаким великим веществам (высоким материям) не научить, и, следовательно, нет никакой нужды назначать ему такую высокую плату».

Мотивы отказа Вольфа выгодно выделяют его из числа многих иностранцев, не стеснявшихся получать высокую плату и не раз увольнявшихся из русской службы с аттестацией о том, что их инвенции (открытия, изобретения) науке никакого приращения не дали.

36) Поэт Валерий Брюсов, любитель математики, выразил этот факт в стихах:

Но пред Эдипом загадка сфинкса:
Простые числа всё ещё не разгаданы.

37) Карл Фридрих Гаусс (родился 30 апреля 1777 г., умер 23 февраля 1855 г.) является величайшим немецким математиком, имя которого часто ставится на третье место в ряду математиков мирового значения (после Архимеда и Ньютона). Выполнив очень серьёзные исследования в области геометрии и алгебры к возрасту в двадцать лет, Гаусс в 1801 г. издал печатавшийся несколько лет обширный труд «Арифметические исследования», который в течение последующих 150 лет являлся и продолжает служить источником идей для исследований по высшей арифметике. К тому же времени он выполнил важные работы по астрономии, а в дальнейшем внёс очень много нового в высшую геометрию, геодезию, алгебру, анализ, физику. В течение первой половины XIX в. Гаусс считался величайшим математиком в мире. Дважды велись переговоры с ним о переезде в Россию, на что он в принципе был согла-

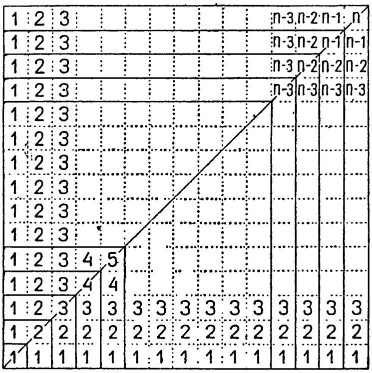


Рис. 107.

сен. По словам академика А. Н. Крылова, при большей гибкости административных лиц мы могли бы говорить теперь не о «Карле Фридрихе», а о «Карле Фёдоровиче Гауссе». Имея замечательную способность к изучению языков, Гаусс в совершенстве владел латинским языком, на котором написаны основные его работы, а в преклонном возрасте овладел русским языком. Он глубоко уважал Н. И. Лобачевского, к идеям геометрии которого пришёл самостоятельно. О Гауссе: «Карл Фридрих Гаусс». Сб. статей под ред. акад. И. М. Виноградова, изд. АН СССР, 1956.

В речи акад. И. М. Виноградова даётся следующая характеристика творчества Гаусса:

«Подобно тому, как это было у Архимеда, Ньютона, Эйлера и впоследствии у Чебышева, большинство работ Гаусса было вызвано задачами, которые ставили естествознание и практическая деятельность...

Все общие математические идеи появились у него в связи с решением совершенно конкретных задач. Но эти задачи большей частью относились к важным узловым вопросам современной ему математики. В дальнейшем, в руках его продолжателей, идеи Гаусса привели к созданию новых областей математики...

После Гаусса осталось обширное рукописное наследие, которое было опубликовано много позже его смерти. В рукописях этих математики с изумлением нашли целый ряд теорем, данных без доказательства и касающихся самых различных отделов математики...

Русские математики всегда высоко ценили и глубоко изучали работы Гаусса. Некоторые исследования русских математиков являлись непосредственным продолжением работ Гаусса...

Указанная глубокая связь, которая всегда существовала между немецкими и русскими математиками, должна служить примером того дружеского сотрудничества, к которому мы стремимся во всех областях нашей жизни и которое принесёт пользу обоим нашим великим народам».

О Гауссе см. ещё «Вопросы истории естествознания и техники», вып. I, изд. АН СССР, 1956 (приглашение Гаусса в Россию).

38) О формуле Чебышева сказано в биографическом очерке о нем в последней главе книги.

39) Профессор Мариано Гарсия (университет Пуэрто-Рико) при помощи современных вычислительных машин в 1957 г. нашёл 150 новых пар дружественных чисел.

40) Примеры ошибочных заключений по аналогии даются в книгах о методе математической индукции (И. С. Соминского, И. Я. Депмана).

41) Эти формулы и аналогичные доказываются методом математической индукции.

42) Равенство $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ может быть получено разными другими способами, например графически следующим образом.

Начертим квадрат в n^2 клеток и проведём его диагональ. Заполним клетки числами натурального ряда, как показано на рис. 107. В левой половине (от диагонали) в клетках до лежащих на диагонали вписываем единицы в первом столбце, двойки во втором столбце, тройки в третьем столбце и так далее. В правой половине квадрата делаем то же самое, только не в столбцах, а в строках, начиная с нижней. Очевидно, обе половины содержат одни и те же числа.

В наугольниках, считая от нижней левой вершины квадрата, как было показано выше, стоят числа, дающие в сумме 1^2, 2^2, 3^2, ..., $(n-1)^2$, n^2.

Сумма всех чисел внутри квадрата равна $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$. Обозначим эту сумму символом S_2.

Сумму чисел, стоящих в левой половине квадрата, исключая стоящие на диагонали, можно выразить следующим образом, записывая числа по столбцам и начиная справа:

$$1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots+(n-1)[n-(n-1)]=$$

$$=n+2n+3n+\ldots+(n-1)n-[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]=$$

$$=n[1+2+3+\ldots+(n-1)]-[S_2-n^2]=$$

$$=n[1+2+3+\ldots+(n-1)+n]-S_2=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}-S_2.$$

Сумма чисел на диагонали $1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n\ (n+1)}{2}$. Сумму всех чисел, стоящих внутри квадрата, равную искомой S_2, получим, сложив удвоенную сумму чисел левой половины квадрата и сумму чисел, стоящих на диагонали:

$$S_2=2\,\frac{n^2(n+1)}{2}-\ 2S_2+\frac{n(n+1)}{2},$$

откуда

$$3S_2=\frac{2n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

и

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Другой способ нахождения суммы квадратов n первых чисел натурального ряда: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

Имеем:

$$x^3-(x-1)^3=x^3-x^3+3x^2-3x+1=3x^2-3x+1.$$

Выпишем равенство

$$x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$$

для значений $x=1$, 2, 3, 4..., $(n-1)$, n:

$$1^3-0^3=3\cdot1^2-3\cdot1+1$$

$$2^3-1^3=3\cdot2^2-3\cdot2+1$$

$$3^3-2^2=3\cdot3^2-3\cdot3+1$$

$$4^3-3^3=3\cdot4^2-3\cdot4+1$$

$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1$$

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1.$$

Сложив левые части равенств, получим n^3.

Сложение правых частей равенства по столбцам даёт:

$$3[1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2]-3[1+2+3+4+$$
$$+\ldots+(n-1)+n]+n\cdot 1.$$

Это выражение равно сумме левых частей равенств n^3. Так как $1+2+3+$ $+\ldots+n=\frac{n\ (n+1)}{2}$, то имеем:

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-3\ \frac{n(n+1)}{2}+n=n^3$$

или.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}=$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

43) Приведённая таблица равенств содержится в книге Фаулхабера «Арифметические чудеса» («Miracula arithmetica», 1622). В другой своей книге «Academia algebrae» Фаулхабер доводит таблицу до семнадцатых степеней и получает 8 бернуллиевых чисел.

44) По таблице простых чисел 199-е простое число

$$P_{199}=1217.$$

45) Нечётное число $2n+1$ можно представить в виде $2(n-1)+3$. Число $2(n-1)$ чётное. Если оно есть сумма двух простых чисел P_1+P_2, то $2n+1=$ $=P_1+P_2+3$.

46) Французский математик Лионнэ является единственным автором, высказавшим в 1879 г. сомнение в правильности предположения Гольдбаха для чётных чисел.

47) Таблетка эта называется по имени бывшего её владельца «таблетка Плимптона 322».

Разными авторами были даны практические способы нахождения пифагоровых троек. Укажем одно из этих правил.

Пусть n — натуральное число:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}=\frac{2n+2}{n^2+2n};$$

$(2n+2)^2+(n^2+2n)^2=(n^2+2n+2)^2$; имеем пифагорову тройку, которую составляют числитель и знаменатель суммы дробей и знаменатель, **увеличенный на два.**

Пример: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$; пифагорова тройка 8, 15, 17.

Примечание. Если n чётное, $n=2k$, то по правилу имеем, **не производя сокращения дробей и беря за общий знаменатель при сложении произ-**

ведение знаменателей данных дробей: $\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}=\frac{4k+2}{2k(2k+2)}$ и пифагорову тройку $4k+2$, $2k(2k+2)$ и $2k(2k+2)+2$.

Все числа полученной тройки делим на 2.

Пример: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{10}{24}$; 10, 24 и 26 после деления на 2 дают пифагорову тройку 5, 12, 13.

См. ещё примечание о средней гармонической.

48) Дадим доказательства для равенства квадратов, ограничиваясь тремя и четырьмя слагаемыми в левой половине.

1. Пусть тройка чисел начинается с числа n. Тогда

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=(n+3)^2+(n+4)^2;$$

$$n^2-8n-20=0;$$

$$n^2-8n-20=n^2-10n+2n-20=n(n-10)+2(n-10)=$$
$$=(n-10)(n+2).$$

Трёхчлен $n^2-8n-20$, равный $(n-10)(n+2)$, обращается в 0 только при одном натуральном значении n, именно: $n=10$. Значит, существует только одна тройка натуральных чисел, удовлетворяющая условию вопроса.

2. Предположим, что сумма квадратов четырёх последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов следующих трёх натуральных чисел. Пусть первое число четвёрки n. Тогда должно существовать равенство:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2;$$

$$n^2-18n-63=0.$$

Трёхчлен

$$n^2-18n-63=n^2-21n+3n-63=n(n-21)+3(n-21)=$$
$$=(n-21)(n+3)$$

обращается в нуль только при единственном натуральном значении n, именно $n=21$. Следовательно, существует только одна четвёрка натуральных чисел, имеющих указанное в вопросе свойство: $21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$.

Подробнее вопрос рассматривается в книге: И. Я. Депман, Рассказы о решении задач, Л., 1957.

49) Для доказательства достаточно раскрыть скобки в правой половине равенства и заменить $1+2+3+\ldots+(n-1)$ через $\frac{(n-1)n}{2}$.

50) Равенства можно доказать преобразованием выражения, стоящего в правой половине:

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(3n-2)=n+(n+1)+(n+2)+\ldots$$
$$\ldots+[n+(2n-2)]=n[(2n-2)+1]+1+2+3+\ldots+(2n-2)=$$
$$=n(2n-1)+\frac{(2n-2)(2n-2+1)}{2}=n(2n-1)+\frac{2(n-1)(2n-1)}{2}=$$
$$=n(2n-1)+(n-1)(2n-1)=(2n-1)(n+n-1)=$$
$$=(2n-1)(2n-1)=(2n-1)^2.$$

51) Утверждение о том, что куб всякого натурального числа есть разность квадратов целых чисел, можно доказать способом, применённым Ферма.

Предположим, что $n^3 = x^2 - y^2$. Это равенство можно переписать в виде $n^2 \cdot n = (x + y)(x - y)$, последнему равенству может удовлетворить, полагая

$$x + y = n^2, \quad x - y = n, \text{ откуда } x = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad y = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

52) У. Гамильтон, Лекции о кватернионах, 1853.

53) По истории математических символов существует капитальный труд Ф. Кеджори, автора имеющейся в русском переводе «Истории элементарной математики» (изд. 2; Одесса, с очень ценными дополнениями проф. И. Ю. Тимченко).

Труд Ф. Кеджори о математических символах: A. History of Mathematical Notations by Florian Cajori, Dr. Professor of the History of Mathematics, University of California, The Open Court Publishing Company. Chicago. Illinois I том, 1928, обозначения элементарной математики 16 + 451 страниц; II том, 1929, обозначения главным образом высшей математики (включая многие символы элементарной), 16 + 367 страниц. Этот труд, иллюстрированный сотнями снимков из старых изданий, является в мировой литературе единственной по своей основательности историей математических символов.

54) Русские и славянские математические рукописи часто говорят о необходимости проверки результатов действий и пестрят напоминаниями:

«Хощеши пытати гораздо ли еси умножал или негораздо, и ты всегда пытай сице...» (Если хочешь проверить, верно или неверно умножение, ты проверяй так...)

55) Созвучно с этим начало русской рукописной арифметики XVII в.: «Хто сию мудрость знает, может быть у государя в великой чти (чести) и в жалованьи; по сей мудрости гости (купцы) по государствам торгуют и во всяких товарех и торгех силу знают и во всяких весах и мерах и в земном верстании и в морском течении зело искусни, и счёт от всякого числа перечню знают».

56) Об этом свидетельствуют очень распространённые английские стихи:

Multiplication is vexation.
Division is as bad,
The Rule of three perplexes me,
And Fractions drive me mad,

что означает: умножение есть мучение, деление — столь же противно, тройное правило наводит досаду, а дроби сводят с ума.

57) Можно указать способ представления любой правильной дроби в виде суммы долей (египетских дробей).

Существует тождественное равенство для любых натуральных: a, b и n $(a < b)$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)a - b}{(n+1)b}. \qquad (*)$$

Пусть n есть целая часть дроби $\frac{b}{a}$ и обозначается знаком $\mathbf{E}\left(\frac{b}{a}\right)$. В равенстве (*) подставим вместо n целое число $\mathbf{E}\left(\frac{b}{a}\right)$ и повторим подстановку, пока получим для $\frac{a}{b}$ сумму долей. Покажем это на примере дроби $\frac{13}{20}$.

$$n = \mathbf{E}\left(\frac{20}{13}\right) = 1 \left(\text{целая часть дроби } \frac{20}{13}\right).$$

По равенству (*)

$$\frac{13}{20}=\frac{1}{1+1}+\frac{(1+1)\cdot 13-20}{(1+1)\cdot 20}=\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 13-20}{2\cdot 20}=\frac{1}{2}+\frac{6}{40}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}. \qquad (**)$$

Над дробью $\frac{3}{20}$ проделаем те же преобразования:

$$\mathrm{E}\left(\frac{20}{3}\right)=6;$$

$$\frac{3}{20}=\frac{1}{6+1}+\frac{(6+1)\cdot 3-20}{(6+1)\cdot 20}=\frac{1}{7}+\frac{21-20}{7\cdot 20}=\frac{1}{7}+\frac{1}{140}.$$

Подставляя это значение вместо $\frac{3}{20}$ в равенство (**), имеем:

$$\frac{13}{20}=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}.$$

Таким же образом находим:

$$\frac{17}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}.$$

58) В конечных шестидесятеричных дробях выражаются несократимые дроби со знаменателями 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, а в конечных десятичных дробях из них только дроби со знаменателями 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50.

Пример: $\frac{1}{27}$ в десятичных дробях даёт 0,037 037..., а в шестидесятеричных дробях $0^{0}2^{\mathrm{I}}\ 13^{\mathrm{II}}\ 20^{\mathrm{III}}$, т. е. $\frac{2}{60}+\frac{13}{60^2}+\frac{20}{60^3}$ (находится делением $1:27$ в шестидесятеричной системе). Для упражнения в делении в недесятичной системе счисления выполним это деление:

$$\begin{array}{r|l}
1 & 27 \\ \cline{2-2}
60^{\mathrm{I}} & 0^{\circ}\,2^{\mathrm{I}}13^{\mathrm{II}}20^{\mathrm{III}} \\
54 & \\ \hline
\times\, 6^{\mathrm{I}} & \\
60 & \\ \hline
360^{\mathrm{II}} & \\
351 & \\ \hline
\times\, 9^{\mathrm{II}} & \\
60 & \\ \hline
540^{\mathrm{III}} & \\
540 & \\ \hline
\end{array}$$

0° означает 0 целых

2^{I} » $\frac{2}{60}$,

13^{II} » $\frac{13}{60^2}$,

20^{III} » $\frac{20}{60^3}$.

59) Итонская школа, недалеко от Лондона — учебное заведение для воспитания детей высшей английской аристократии. Получение образования

в Итоне считается в Англии лучшей рекомендацией человека. Отсюда становится понятной в повести Конан Дойля фраза Шерлока Холмса, когда он, для того чтобы охарактеризовать необычного своего противника, ограничивается указанием: «он воспитывался в Итоне!».

60. Рукопись Бонфиса написана на древнееврейском языке. Прочёл и перевёл её востоковед С. Гандц (1884—1954), уроженец Польши, профессор истории культуры семитических народов в Филадельфии. На основании данных древневавилонского и древнеарабского языков, знатоком которых был Гандц, он доказывает, что термин «алгебра» не арабского происхождения, как обычно считают, а вавилонского.

В последнем языке термин с корнем «джебр» обозначал искусство решения уравнений, т. е. имел тот же смысл, как в нашем математическом языке.

61) Джемшид Гиясс эддин ал-Каши, Ключ арифметики. Трактат об окружности. Перевод с арабского Б. А. Розенфельда. Комментарии А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, с приложением репродукций арабских рукописей обоих трактатов. М., Гос. изд-во техн. теорет. литературы, 1956.

62) Деление 47°50′ на 1°25′, т. е. $47\frac{50}{60}$ на $1\frac{25}{60}$, или 574 на 17, даёт в десятичных дробях $33\frac{13}{17}=33,(764\,705\,882\,352\,941\,1)$ — 16 цифр в периоде.

Выполним обращение обыкновенной дроби $\frac{13}{17}$ в шестидесятеричную:

$$\begin{array}{r|l r}
13 & 17 & \\
\underline{60} & 0,45^{\mathrm{I}}52^{\mathrm{II}}56^{\mathrm{III}}28^{\mathrm{IV}}14^{\mathrm{V}}\,7^{\mathrm{VI}}\,3^{\mathrm{VII}}31^{\mathrm{VIII}} & \\
780^{\mathrm{I}} & \text{(первых шестидесятеричных долей)} & 4^{\mathrm{IV}} \\
\underline{765} & & \underline{60} \\
15^{\mathrm{I}} & & 240^{\mathrm{V}} \\
\underline{60} & & \underline{238} \\
900^{\mathrm{II}} & \text{(вторых долей)} & 2^{\mathrm{V}} \\
\underline{884} & & \underline{60} \\
16^{\mathrm{II}} & & 120^{\mathrm{VI}} \\
\underline{60} & & \underline{119} \\
960^{\mathrm{III}} & \text{(третьих долей)} & 1^{\mathrm{VI}} \\
\underline{952} & & \underline{60} \\
8^{\mathrm{III}} & & 60^{\mathrm{VII}} \\
\underline{60} & & \underline{51} \\
480^{\mathrm{IV}} & & 9^{\mathrm{VII}} \\
\underline{476} & & \underline{60} \\
4^{\mathrm{IV}} & & 540^{\mathrm{VIII}} \\
 & & \underline{527} \\
 & & 13^{\mathrm{VIII}}
\end{array}$$

Получился остаток, равный делимому, поэтому при делении повторяются уже найденные числа шестидесятеричных долей: период содержат 8 разрядов.

Этот пример, между прочим, показывает, что обращение обыкновенной дроби в шестидесятеричную вполне аналогично обращению обыкновенной дроби в десятичную.

63) М. Кантор, История математики, т. II, стр. 165.

64) Персий (I в. н. э.) упрекает своих современников в стремлении к тому,

«чтобы вместо скромных пяти деньги по одиннадцати стали приносить процентов». Гораций (I в. до н. э.) бичует тех, что «не стыдится брать с должников пять процентов за месяц» («Римская сатира», М., 1957, стр. 106, 12).

65) По подсчёту акад. Б. С. Якоби, переход на метрическую систему сокращает учебник арифметики на одну треть. См.: И. Я. Депман, Меры и метрическая система, 1954, стр. 27 и след.

66) Antonio Favaro, Il metro proposito come unità di misura nel 1675. Annales internationales d'histoire. Congrés de Paris, 1900, 5-e section Paris, A. Colin, 1901, 1 v.

Mario Gliozzi, Precursori del sistema metrico decimale. Atti della Reale Accademia di Torino, 67(1932), p. 29—50.

Tadeusz Piech, Zarys Historii Fizyki w Polsce, Polska Akademia Umiejetnosci, III, Krakow, 1948.

67) Science News Letters (май 1956 г.) сообщает, что радиус Земли оказался на 420 футов короче, чем считали до сих пор.

68) Итальянский геометр Лоренцо Маскерони (1750—1800) творец «геометрии циркуля», выполняющей одним только циркулем все построения, которые в обычной геометрии выполняются циркулем и линейкой.

См. А. М. Воронец, Геометрия циркуля, 1934.

С. И. Зетель, Геометрия линейки и геометрия циркуля, 1950.

69) Богатая событиями история разработки современной метрической системы и введения её в международный обиход рассказана в указанной книге «Меры и метрическая система».

70) «Записки Академии наук», т. 61, кн 2, 1890, стр. 99.

71) Персий (III сатира) упрекает себя: «Мы храпим... а уж тень-то у пятого знака» (на солнечных часах), т. е. время близко к полудню.

72) В литературе высказано мнение, что предпочтение делению циферблатов на 12 частей вместо 24 отчасти было вызвано и желанием избежать тринадцатого часа.

73) Исаак Аргирус, византийский учёный монах XIV в., автор ряда математических и астрономических работ, один из последних учёных, писавших на греческом языке.

74) Как о И. Литтрове, так и о профессорах Московской духовной академии, излагавших арифметическую теорию календаря (Н. С. Делицын и др.), имеются данные в статье автора настоящей книги в «Историко-математических исследованиях», вып. IX, М., 1956.

75) В литературе имеются указания, что церковные деятели, установившие эру нашего летосчисления как год «рождения христова», сознательно исключили нулевой год, обязательный для правильной хронологии. Они опасались, что учение о «рождении Христа в нулевом году» может навести верующих на мысль о недостоверности этого, важного для церкви, события.

76) Французский революционный календарь отражает в своих названиях месяцев климатические условия Франции. Он поэтому идёт в разрез с лозунгом, лежавшим в основе идей творцов метрической системы: «Для всех времён, для всех народов!» По этой причине этот календарь обоснованно критиковал славянский математик Георг Вега. См. статью: И. Я. Депман, Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я. Ф. Кулик, 1953, «Историко-математические исследования», вып. VI, М., 1953.

77) Несомненно ошибочным является перевод даты первого вандемьера IX года как 20 октября 1800 г. в книге академика Е. В. Тарле «Наполеон», (изд. Академии наук СССР, 1957, стр. 114). Первое вандемьера IX года — это 23 сентября 1800 г. Первое вандемьера — начало года по революционному календарю, эрою которого служило 22 сентября 1792 г (календарь вступил в силу с начала II года: 22 сентября 1793 г.). Во все тринадцать с третью года действия его первое вандемьера приходилось только на 22, 23 и 24 сентября и ни в каком случае не могло совпасть с октябрём вопреки тому, что пишет академик Е. В. Тарле в своей книге Здесь имеет место несомненная ошибка автора или корректора. В остальных переводах французского революционного календаря в современной книге Е. В. Тарле ошибок не обнаружилось. Это утверждение подкрепляется старым источником:

La Clef de l'Arithmétique industrielle théorique-pratique par L. Brion, Professeur de Mathématiques. Paris, 1836, p. 230. Tableau IV: Concordance des calendriers républicain et grégorien.

78) «Возникновение системы мер и способов измерения величин», Учпедгиз.

79) Приведём характерное для учебников того времени полное заглавие книги: «Иоганна Даниеля Интельмана, городского бухгалтера и Общества любителей и ревнителей искусства вычислений старающегося члена, **Арифметический путеводитель** или, согласно Эстляндской и Лифляндской торговой практике, основательно изложенный **Первый Ревельский учебник счёта**, содержащий все относящиеся к счётному искусству части (штуки) в целых и ломаных числах, также отечественные и иноземные вексельные и мореходные расчёты в эстляндских и лифляндских валютах, равно как в валютах других знатных торговых городов, в XII частях и в весьма полезном приложении, с наивозможным старанием, собственным иждивением автора в печати изданные, с предисловием господина Иоганна Иоахима Лангена, публичного ординарного профессора математики в Галле, сочлена Римского императорского и Прусского королевского научных обществ. Напечатана в магдебургском Галле у Иоганна Иустина Гебауэрна, университетского типографщика (1736)».

80) «**Руководство по арифметике**, в котором нужнейшие и полезнейшие части оной в ясных описаниях наилучших правил, с достаточными примерами к общему пользованию в торговле и производстве, особливо же для пользы возлюбленной школьной молодёжи составил и издал Михаил Вебер, коллега и кантор рыцарской Домской школы в Ревеле. Ревель, напечатал Яков Иоганн Кёлер, 1737».

Пространные заглавия книг являются показателями отношения к арифметике общества того времени. Употреблённый в заглавии второй книги термин «коллега» означал, что учитель арифметики в то время уже признавался полноправным членом педагогической коллегии училища (до этого долгое время это не имело места и широкое распространение в литературе имела фраза: Mathematicus non est collega — математик не коллега) Кантор — учитель церковного пения и музыки.

81) Три числа a, b, c составляют гармоническую пропорцию, если $a:c=(a-b):(b-c)$. Число b называется средней гармонической чисел a и c. Гармоническую пропорцию можно записать и так $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$. Из обеих записей получаем выражение средней гармонической чисел a и c в виде

$$b=\frac{2ac}{a+c}.$$

Нахождение среднего гармонического двух чисел называется гармоническим делением. Средняя гармоническая применяется в теории музыки, откуда и получила своё название.

Высота тона в теории музыки определяется числом колебаний в единицу времени, интервал двух тонов — отношением чисел колебаний.

Положим, что тон do_1 определяется некоторым числом колебаний за время 1; тон октавой выше имеет то же число колебаний за время $\frac{1}{2}$.

Средняя гармоническая между 1 и $\frac{1}{2}$ будет $\frac{2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

Это число характеризует интервал — квинту от do_1, т.е. sol.

Средняя гармоническая между do_1 и sol, т. е. между числами 1 и $\frac{2}{3}$, даёт $\dfrac{2\cdot 1\cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}$; соответственный интервал называется большой терцией от do_1, а верхний тон его *mi*.

Таким образом, образуется музыкальная гамма. Подробности по вопросу содержатся в учебниках теории музыки. Серьёзные исследования в этом вопросе дал профессор Юрьевского университета А. Эттинген (1836—1920), автор работы по методике преподавания элементарной математики. А. Эттингена высоко ценил преемник его по кафедре акад. Б. Б. Голицын.

Средняя гармоническая двух чисел имеет применение в физике.

Понятия средних величин применяются широко в статистике.

Применение средних арифметических происходит на практике постоянно. В некоторых вопросах нельзя, однако, применять среднюю арифметическую, например при определении среднего прироста в процентах. Если, скажем, в первый год прирост был 2%, во второй год — 48% (предполагаем такой исключительный случай), то средний процент прироста за два года не будет арифметической средней приростов за эти два года, т. е. $\frac{2\%+48\%}{2}=25\%$, а будет средней геометрической, которую надо вычислять следующим образом: $1+\frac{x}{\ }=\sqrt{1{,}02\cdot 1{,}48}\approx 1{,}23$, и средний процент прироста за год будет приблизительно 23%.

Действительно, по непосредственному подсчёту за первый год 100 обратится в 102, а 102 за второй год в $(102\times 1{,}48)\approx 150{,}96$; по средней процентной таксе 100 за первый год обратится в 123, за второй год в $123\times 1{,}23=151{,}29$. Если вычисление выполнять более точно (учесть доли процентов), то можно получить более близкое совпадение результатов.

Если бы мы приняли за средний процент прироста среднюю арифметическую приростов обоих лет, т. е. 25%, то за первый год 100 обратилось бы в 125, а это число за второй год в $125\times 1{,}25=156{,}25$. Расхождение с действительным результатом 150,96 было бы значительно больше, чем при применении средней геометрической приростов за оба года. При рассмотрении больших объектов применение средней арифметической недопустимо.

Можно отметить интересное свойство пары последовательных натуральных чисел.

Имеем выражение средней гармонической b чисел a и c: $b=\frac{2ac}{a+c}$.

Полагая $c=a+1$, имеем: $b=\frac{2a(a+1)}{2a+1}=\frac{2a^2+2a}{2a+1}$.

Проверка показывает, что $(2a+1)^2+(2a^2+2a)^2=(2a^2+2a+1)^2$. Средняя гармоническая двух последовательных натуральных чисел есть дробь, члены которой и увеличенный на единицу числитель составляют пифагорову тройку:

a	$c=a+1$	$b=\frac{2ac}{a+c}$	Пифагорова тройка
1	2	$\frac{4}{3}$	$3^2+4^2=5^2$
2	3	$\frac{12}{5}$	$5^2+12^2=13^2$
3	4	$\frac{24}{7}$	$7^2+24^2=25^2$
.	.	. .	. . . .

Средняя гармоническая имеет применения в физике и в экономических вопросах. О пропорциях и средних гармонических смотри: И. А. Клейбер (1863—1892), средние величины: арифметическая, геометрическая и гармоническая, «Вестник опытной физики и элементарной математики», № 78—79.

82) Русского издания замечательных лекций Лагранжа по элементарной математике нет. Имеется немецкий перевод: Lagrange's Mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. Niedermüller, Leipzig, 1880.

83) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, отсюда $\frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$;

$$a : c = a^2 : b^2.$$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, отсюда $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$;

$$a : d = a^3 : b^3.$$

84) Об этих задачах смотри книгу автора «Рассказы о решении задач» (Л., Детиздат, 1964).

85) Автор настоящей книги в своей детской книге «Рассказы о математике» поместил параграф о математических забавах М. Ю. Лермонтова.

СОДЕРЖАНИЕ

III. Действия над целыми числами

IV. Дробное число

V. Именованные числа

VI. Практические «правила» в учебниках арифметики

VII. Арифметические забавы и занимательные задачи в учебниках арифметики

VIII. Биографические сведения о некоторых математиках, упомянутых в книге

IX. Деятели арифметического образования в России

Иван Яковлевич Депман

ИСТОРИЯ АРИФМЕТИКИ

Редактор *И. А. Павленко*
Художник *И. В. Царевич*
Художественный редактор *А. В. Сафонов*
Технический редактор *Г. Л. Татура*
Корректор *Т. М. Графовская*

* * *

Сдано в набор 16/VII 1964 г. Подписано к печати 11/I 1965 г. 60×90$^{1}/_{16}$. Печ. л. 26. Уч.-изд. л. 24,63. Тираж 34 тыс. экз. (Тем. план 1965 г. № 151). А 00010. Заказ № 520.

* * *

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ярославский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Ярославль, ул. Свободы, 97.

Цена без переплета 67 к.,
переплет 15 к.

Цена 82 коп.

И. Я. Депман

История

арифметики

· ПРОСВЕЩЕНИЕ · 1965 ·